

Optimierung I

Übungsblatt 10, Abgabe: Montag, 10.07.17, 15:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1:**10 P.**

Wir betrachten hier das BFGS Quasi-Newton-Verfahren.

- Zeigen Sie $\det(I + xy^T) = 1 + y^T x$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Hinweis: Erweitern Sie x zu einer Basis $Q = (x | \dots)$. Falls wir dann $y^T Q = (z_1, \dots, z_n)$ definieren, erhalten wir $z_1 = y^T x$ und $\det(I + xy^T) = \det(Q^{-1}(I + xy^T)Q) = \det(I + e_1 y^T Q)$.
- Zeigen Sie $\det(I + xy^T + uv^T) = (1 + y^T x)(1 + uv^T) - (x^T v)(y^T u)$ mittels einer ähnlichen Technik wie oben.
- Nutzen Sie die oben hergeleitete Formel um $\det h_{k+1} = \det H_k \frac{m_k}{q_k}$ herzuleiten.
- Zeigen Sie $\text{trace} H_{k+1} = \text{trace} H_k - \frac{q_k}{\cos^2 \theta_k} + M_k$.
- Zeigen Sie $\text{trace} H - \log \det H \geq 0$ für alle symmetrisch positiv definiten Matrizen H .

Aufgabe 2:**4 P.**

- Eine äquivalente Definition des projizierten Gradientens ist, dass es der Vektor ist, der folgendes Problem löst:

$$\min_{p \in \mathbb{R}^n} |\nabla f_0(x) - p|^2 \text{ unter } Ap = 0. \quad (1)$$

Leiten Sie die aus der Vorlesung bekannte Projektionsformel her, indem Sie das Problem via den KKT-Bedingungen lösen.

- Zeigen Sie, dass ein p , welches

$$\min_{p \in \mathbb{R}^n} Df_0(x)p \text{ unter } Ap = 0, |p|^2 = 1 \quad (2)$$

löst, die gleiche Richtung wie der negative projizierte Gradient besitzt.

Programmieraufgabe:**6 P.**

Wir möchten die Methode des projizierten Gradienten implementieren. Das Programm *minim_Constrained* soll folgende Parameter erhalten: Zielfunktion, erste Ableitung, zweite Ableitung, lineare Gleichheitsnebenbedingungen, nicht-lineare Gleichheitsnebenbedingungen, Startpunkt, Konstante für Schrittweitensteuerung, Abstiegsmethode. Falls etwas nicht benötigt wird, z.B. nur eine Art der Nebenbedingungen, so kann dies z.B. mit 0 angezeigt werden. Die Fälle müssen dann im Programm abgefangen und korrekt verarbeitet werden.

Nutzen Sie die Folien der Vorlesung und implementieren Sie den Algorithmus mit Schrittweitensteuerung für Gradienten- und Newtonabstieg. Nutzen Sie für die Projektion das Newton-Verfahren.

Testen Sie ihr Programm an folgendem Beispiel und versuchen Sie das Result grafisch darzustellen: $f(x) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$, unter $x_1 + x_2 = 2$ und $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 0$. Nutzen Sie als Startpunkt $x^0 = (-1.1, 1)$.