Optimierung I

Übungsblatt 8, Abgabe: Montag, 26.06.17, 15:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1: **7 P.**

Lösen sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus' folgendes lineare Programm:

$$\begin{aligned} \min_x & - 2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 \\ \text{unter } & x_1 + 3_2 + x_4 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Wie stark können die Elemente von $b = (4, 3, 3)$ geändert werden, ohne dass sich die optimale Basis ändert?
- Wie stark können die Koeffizienten $c = (2, 4, 1, 1)$ geändert werden, ohne dass sich die optimale Basis ändert?
- Was passiert mit den optimalen Kosten bei kleinen Änderungen in b?
- Was passiert mit den optimalen Kosten bei kleinen Änderungen in c?

Aufgabe 2: **8 P.**

Wir wollen Bedingungen herleiten, unter denen die Sattelpunktseigenschaft

$$\sup_{z\in Z} \inf_{w\in W} f(w, z) = \inf_{w\in W} \sup_{z\in Z} f(w, z) \tag{1}$$

gilt, für $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $W \times Z \subset dom f$ und $Z, W \neq \emptyset$. Wir nehmen an, dass die Funktionen

$$g_z(w) = \begin{cases} f(w, z), \text{ falls } w \in W \\ \infty, \text{ sonst} \end{cases}$$

$$h_w(z) = \begin{cases} -f(w, z), \text{ falls } z \in Z \\ \infty, \text{ sonst} \end{cases}$$

abgeschlossen und konvex für alle $w \in W$ und $z \in Z$ sind.

- Die rechte Seite von (1) kann dargestellt werden als $p(0)$, wobei

  $$p(u) = \inf_{w\in W} \sup_{z\in Z} (f(w, z) + u^T z).$$

  Zeigen Sie, dass p konvex ist.

- Zeigen Sie, dass die Konjugierte von p gegeben ist durch

$$p^*(v) = \begin{cases} -\inf_{w\in W} f(w,v), & \text{falls } v \in Z \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass die Konjugierte von p^* gegeben ist durch

$$p^{**}(u) = \sup_{z\in Z} \inf_{w\in W} (f(w,z) + u^T z).$$

  Wir können also (1) darstellen durch $p^{**}(0) = p(0)$.

- Zeigen Sie, dass $0 \in$ *int dom* p, falls W und Z beschränkt sind und folgern Sie, dass $p^{**}(0) = p(0)$.

- Zeigen Sie, dass p abgeschlossen ist, falls die Sublevel-Sets von g_z beschränkt sind. Folgern Sie, dass falls $0 \in$ *dom* p, $p^{**}(0) = p(0)$.

Programmieraufgabe: **5 P.**

Implementieren Sie eine Matlabfunktion [values,points] = *minim*(f,Df,x_0,c_1), welche eine Funktion, ihre erste Ableitung, einen Startpunkt x_0 und ein $0 < c_1 < 1$ erhält, und die gegebene Funktion startend aus x_0 minimiert. Benutzen Sie die Armijo Schrittweitensteuerung mit dem aus der Vorlesung bekannten Backtracking Liniensuchverfahren. Geben Sie von jeder Iterierten den Wert und den Punkt zurück und plotten Sie sie und den Pfad der Iterierten sowie die Funktion f.

- Testen Sie ihre Methode an der Funktion $f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2$ mit $x_0 = (-1,1)$.