Optimierung I

Übungsblatt 7, Abgabe: Montag, 19.06.17, 15:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1: **4 P.**

Berechnen Sie die Legrende-Fenchel Duale von den folgenden Funktionen:

- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei $f(x)$ die Summe der m größten Koordinaten x_i ist.
- $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^p, p > 1.$
- $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^p, 0 \leq p < 1.$
- $f\colon [0,\infty)^n \to \mathbb{R}, f(x) = -(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$

Aufgabe 2: **2 P.**

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit $f(0) = 0$ und sei $g = f^{-1}$ sowie

$$F(x) = \int_0^x f(s)\mathrm{d}s, \quad G(y) = \int_0^y g(s)\mathrm{d}s.$$

Zeigen sie, dass F und G konjugiert sind und geben Sie eine einfache grafische Interpretation von Fenchels Ungleichung $xy \leq F(x) + G(y)$.

Aufgabe 3: **2 P.**

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und zweimal stetig differenzierbar mit $y = \nabla f(x)$ und $D^2 f(x)$ positiv definit. Zeigen Sie $\nabla f^*(y) = x$ und $D^2 f^*(y) = D^2 f(x)^{-1}$.

Aufgabe 4: **7 P.**

Zeichen Sie die Mengen

$$G = \{(u,t) | \exists x \in \mathbb{R}\colon f_0(x) = t, f_1(x) = u\},$$
$$A = \{(u,t) | \exists x \in \mathbb{R}\colon f_0(x) \leq t, f_1(x) \leq u\},$$

geben Sie das duale Problem zu

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f_0(x) \text{ unter } f_1(x) \leq 0,$$

und lösen Sie das primale und duale Problem für die folgenden Fälle. Zeigen Sie, ob das Problem konvex ist, ob Slaters Bedingung erfüllt ist und ob starke Dualität herrscht.

- $f_0(x) = x, f_1(x) = x^2 - 1$

- $f_0(x) = x, f_1(x) = x^2$
- $f_0(x) = x, f_1(x) = |x|$
- $f_0(x) = x, f_1(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{falls } x \geq 1 \\ x, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1 \\ -x-2, & \text{falls } x \leq -1 \end{cases}$
- $f_0(x) = x^3, f_1(x) = -x+1$

Aufgabe 5: **3 P.**

Das reguläre Subdifferential einer (möglicherweisen nicht-konvexen, nicht-stetigen) Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is gegeben durch

$$\hat{\partial} f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n \colon \liminf_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - s \cdot (y-x)}{\|y-x\|_2} \geq 0\}.$$

Das Subdifferential von f ist gegeben durch

$$\partial f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n | \exists x_k, s_k \in \mathbb{R}^n \colon x_k \to x, f(x_k) \to f(x), s_k \to s, s_k \in \hat{\partial} f(x_k)\}.$$

Das Horizon-Subdifferential von f ist gegeben durch

$$\partial^\infty f(x) = \{s \in \mathbb{R}^n | \exists x_k, s_k \in \mathbb{R}^n, t : k \geq 0 \colon t_k \to 0, x_k \to x, f(x_k) \to f(x), t_k s_k \to s, s_k \in \hat{\partial} f(x_k)\}.$$

Berechnen Sie $\partial f(0)$ und $\partial^\infty f(0)$ von

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x|}$