Optimierung I

Übungsblatt 6, Abgabe: Montag, 12.06.17, 15:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1: **3 P.**

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie, dass die Steigung der Sekanten durch x und y monoton wachsend in y ist und leiten Sie daraus in der Definition der Richtungsableitung die Gleichheit $\liminf_\lambda = \inf_\lambda$ her.

Aufgabe 2: **5 P.**

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie folgendes:

- Für jedes $\hat{x} \in \operatorname{relint} \operatorname{dom} f$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\bar{f}(x) = \lim_{t \searrow 0} f(x + t(\hat{x} - x))$.
- Für jedes $x \in \operatorname{relint} \operatorname{dom} f$ gilt $f(x) = \bar{f}(x)$.

Aufgabe 3: **4 P.**

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ heißt *quasikonvex*, falls die Domain und alle Sublevel Sets konvex sind.

- Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f(x) = \frac{|x-a|}{|x-b|}$ quasikonvex auf dem Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - a| \leq |x - b|\}$ ist.
- Beweisen Sie *Jensens Ungleichung für quasikonvexe Funktionen*: f ist genau dann quasikonvex, wenn die Domain konvex ist und

$$\forall x, y \in \operatorname{dom} f, \theta \in (0,1)\colon f(\theta x + (1-\theta)y \leq \max(f(x), f(y)).$$

Aufgabe 4: **4 P.**

Berechnen Sie die Legrende-Fenchel Duale der folgenden Funktionen ($\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit).

- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = x^T Q x + a^T x$
- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = -x^T Q x + a^T x$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \alpha |x - b|^2 + |x|$
- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \alpha \|x - a\|_2^2 + \|x\|_1$

Aufgabe 5: **4 P.**

- Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex mit orthogonaler Projektion P_C und Indikatorfunktion $\mathbf{1}_C$. Zeigen Sie für $x = P_C(y)$, dass $y \in x + \partial \mathbf{1}_C(x)$.
- Bezeichnen wir mit $|\cdot|$ die euklidische Norm und mit $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ eine Norm sowie ihre duale Norm. Zeigen Sie, dass der Minimierer z^* von $\frac{1}{2}|z-x|^2 + \|z\|$ die Bedingung $z^* = x - P_{B_{\|\cdot\|_*}(0,1)}(x)$ erfüllt.