Optimierung I

Übungsblatt 5, Abgabe: Montag, 29.05.17, 15:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1: **6 P.**

Betrachten Sie den Vektorraum $S_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ der symmetrischen Matrizen und sei $E_n \subset S_n$ die Menge der Korrelationsmatrizen, d.h. der positiv semidefiniten Matrizen mit Diagonaleinträgen 1. Zusätzlich definieren wir für $V \subset \mathbb{R}^n$ die Menge

$$F_V = \{M \in E_n \colon V \subset kerM\}$$

- Zeigen Sie, dass E_n konvex ist.
- Finden Sie die affine Hülle und den relativen Rand von E_n.
- Zeigen Sie, dass F_V ein Face von E_n ist.
- Gegeben ein Face F von E_n, zeigen Sie, dass $F = F_V$ falls $V = \cap_{M\in F} kerM$.
- Gegeben $M_0 \in E_n$, zeigen sie, dass das kleinste Face von E_n, welches M_0 enthält, ist gegeben durch $\{M \in E_n \colon kerM_0 \subset kerM\}$.
- Zeigen Sie, dass jedes Face von E_n exposed ist.

Aufgabe 2: **4 P.**

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ nicht konvex. Zeigen Sie, dass dass es einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $y \mapsto \|x-y\|_2^2$ mindestens zwei unterschiedliche Minimierer hat. (Hinweis: Für einn bestimmten Punkt x_0 betrachten Sie Bälle, die C berühren und ihren Mittelpunkt auf der Linie durch x_0 und $P_C(x_0)$ haben.) Kann C so sein, dass es maximal einen solchen Punkt gibt?

Aufgabe 3: **4 P.**

Es sei ein konvexer Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Der *polare Kegel* von K is definiert durch

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \colon y \cdot x \leq 0 \ \forall x \in K\}.$$

- Was ist $(K^\circ)^\circ$?
- Falls K abgeschlossen ist, zeigen Sie, dass $y_x \in P_K(x)$ genau dann, wenn $y_x \in K, x - y_x \in K^\circ, (x - y_x) \cdot y_x = 0$.

Aufgabe 4: **2 P.**

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Unter welchen Bedingungen gibt es ein $s \in \mathbb{R}^n$, so dass $s \cdot x < s \cdot y$ für beliebige $x \in A$ und $y \in B$?

Aufgabe 5: **2 P.**

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und konvex. Ist $f^{-1}\colon (f(a), f(b)) \to \mathbb{R}$ konvex oder konkav oder weder noch?

Aufgabe 6: **2 P.**

Es seien $f_1, \dots, f_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvexe Funktionen, $t_1, \dots, t_m \geq 0$, $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ affin und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen konvex sind.

- $\sum_{i=1}^m t_i f_i$
- $f_1 \circ A$
- $h \circ f_1$