Optimierung I

Übungsblatt 4, Abgabe: Montag, 22.05.17, 15:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1: **2,5 P.**

- Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ affin und $x_0 \in C$. Zeigen Sie, dass

  $$V = C - x_0 = \{x - x_0 \colon x \in C\}$$

  ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist und dass dieser Unterraum unabhänging von der Wahl von $x_0 \in C$ ist.
- Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die affine Hülle aff(C) von C die kleinste affine Menge ist, die C enthält.

Aufgabe 2: **1 P.**

Zeigen Sie, dass das cartesische Produkt $C_1 \times \ldots \times C_k$ convexer Mengen $C_1, \ldots C_k$ konvex ist.

Aufgabe 3: **2 P.**

Zeigen Sie, dass das Innere, das relative Innere und der Abschluss einer konvexen Menge C konvex ist.

Aufgabe 4: **4 P.**

Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ wird *dicht* in $\mathbb{R}^n$ genannt, falls jede offene Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere Schnittmenge mit S hat. Zeigen Sie, dass falls M eine dichte konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$ ist, $M = \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 5: **3 P.**

Welche der folgenden Mengen sind konvex? Zeigen oder widerlegen Sie es.

- Die Menge aller Punkte näher an $S \subset \mathbb{R}^n$ als $T \subset \mathbb{R}^n$.
- Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x + S \subset R\}$ für konvexe $S, R \subset \mathbb{R}^n$.
- Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - a\|_2 \leq \theta \|x - b\|_2\}$ für feste $a \neq b \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in [0, 1]$.

Aufgabe 6: **3 P.**

Zeigen Sie, dass ein Simplex ein Polyeder ist.

Aufgabe 7: **1,5 P.**

Sei $\mathcal{S}_+^n$ die Menge aller positiv semidefiniten symmetrischen Matrizen der Größe $n \times n$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}_+^n$ ein konvexer Kegel im $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

Aufgabe 8: **1,5 P.**

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass jeder extremal Punkt x von conv(S) in S liegt.

Aufgabe 9: **1,5 P.**

Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie, dass $\{P_C(x) \colon x \in \mathbb{R}^n \setminus C\} = \partial C$.