Optimierung I

Übungsblatt 3, Abgabe: Montag, 15.05.17, 15:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1: **3 P.**

Es sei für $Q, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b, c \in \mathbb{R}^n$ das (möglicherweise nicht konvexe) Optimierungsproblem

$$\min_x \frac{1}{2}x^T Qx - c^T x \quad \text{unter } Ax = b$$

gegeben. Zeigen Sie, dass x^* genau dann ein lokal optimaler Punkt ist, wenn x^* auch ein global optimaler Punkt ist.

Aufgabe 2: **4 P.**

Es sei folgendes Optimierungsproblem gegeben:

$$\min_x \; 4x_1 + 3x_2, \quad \text{unter } x_1 + 2x_2 \geq 7, -2x_1 + x_2 \leq 5.$$

- Berechnen Sie das duale Problem.
- Zeichnen Sie die zulässigen Mengen des primalen Problems und markieren Sie die Lösung des Optimierungsproblems ohne es rechnerisch zu lösen. Was fällt Ihnen auf?
  Zeichnen Sie nun noch das duale Problem ein.

Aufgabe 3: **4 P.**

Es sei ein allgemeines lineare Programm gegeben:

$$\min_x c^T x \quad \text{unter } Ax - b = 0, Bx - v \leq 0 \tag{1}$$

Berechnen Sie das duale Problem des dualen Problems von (1). Was beobachten Sie?

Aufgabe 4: **4 P.**

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) \text{ unter } f_1(x), \ldots, f_m(x) \leq 0, h_1(x) = \ldots = h_p(x) = 0$$

mit Domain $\mathcal{D}$. Es sei p^* das primale Optimum und d^* das duale Optimum. Betrachten Sie die Menge $G = \{(f_0(x), \ldots, f_m(x), h_1(x), \ldots, h_p(x)) \colon x \in \mathcal{D}\}$.

- Zeigen Sie, dass für die duale Funktion g die Funktion $(t, u, v) \mapsto (1, \mu, \lambda)^T(t, u, v) = g(\mu, \lambda)$ eine Hyperebene tangential zu G definiert, so dass G auf einer Seite der Ebene liegt.
- Zeigen Sie, dass starke Dualität herrscht, falls $\mu^T u = 0$ am Optimum gilt.

Programmieraufgabe: **5 P.**

Es sei das folgende konvex-konkave Sattelpunktsproblem gegeben:

$$\min_x \max_y f(x,y) = \min_x \max_y \frac{1}{2}(x-5)^2 - \frac{1}{2}(y+3)^2 + 10.$$

Wir möchten versuchen, das Problem numerisch zu lösen. Implementieren Sie Funktionen, die das Sattelpunktsproblem und den Gradienten an einem Punkt auswerten. Nutzen Sie hierzu entweder eigene *m-Files* oder anonyme Funktionen.
Schreiben Sie ein Programm, welches die Sattelpunktsfunktion, den Gradienten, einen Startpunkt $z = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, eine Schrittweite $\Delta t > 0$ und eine feste Iterationszahl $n \in \mathbb{N}$ erhält, und folgendes macht:

In n Iterationen werden jeweils neue Iterierten $x_{n+1} = x_n - \Delta t \partial_x f(x_n, y_n)$ und $y_{n+1} = y_n + \Delta t \partial_y f(x_{n+1}, y_n)$ berechnet. Speichern Sie nach jedem Schritt das neue Tupel $(x, y, f(x,y)$ und geben Sie am Ende diese Tupel zurück.

Plotten Sie die Funktion f in $[-10, 10]^2$ und fügen Sie den Startwert z und die Iterierten hinzu. Plotten Sie f als Konturenplot in 2D und fügen Sie den Weg der Iterierten hinzu.

Testen Sie ihr Programm mit $z = (0,0)$, $\Delta t = 0.25$ und $n = 30$.