Optimierung I

Übungsblatt 1, Abgabe: **Dienstag, 02.05.2017**, 12:00 Uhr, BK 102

Aufgabe 1: **4 P.**

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wird konvex genannt, falls $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1]$. Ein konvexes Optimierungsproblem hat die Form

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f_0(x) \text{ unter } h_1(x) = \ldots = h_p(x) = 0, f_1(x), \ldots, f_m(x) \le 0$$

mit $f_0, \ldots, f_m, h_1, \ldots, h_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $-h_1, \ldots, -h_p$ konvex (also sind $h_1, \ldots, h_p$ affin).

Zeigen Sie: x^* ist ein lokal optimaler Punkt $\Leftrightarrow$ x^* ist ein global optimaler Punkt.

Aufgabe 2: **4 P.**

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass eine überall positiv semidefinite Hessematrix $D^2 f$ eine notwendige Bedingung für Konvexität von f ist. Zeigen Sie, dass sie auch hinreichend ist.

Aufgabe 3: **3 P.**

Es sei folgendes $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9.$$

(a) Nutzen Sie die notwendige Optimalitätsbedingung erster Art und finden Sie die Minimalpunkte von f.

(b) Verifizieren Sie, dass der Punkt lokal optimal ist.

(c) Zeigen Sie, dass der Punkt global optimal ist.

Aufgabe 4: **4 P.**

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$F = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob die Matrix positiv definit ist.

Als Vorbereitung auf die notwendigen Optimalitätsbedingungen zweiter Art unter Gleichheitsnebenbedingungen berechnen Sie die Eigenwerte von F eingeschränkt auf den Tangentialraum der Fläche $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 = 1\}$.

Programmieraufgabe: **5 P.**

Es seien n Punkte $x_i \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Gesucht ist die Gerade, so dass die Summe der quadratischen Abstände der Punkte zur Gerade minimal wird. Da die Gerade durch zwei reelle Parameter charakterisiert wird, muss über ein $x \in \mathbb{R}^2$ optimiert werden.
Programmieren Sie eine Implementierung einer linearen Ausgleichsgeraden durch eine gegebene Punktwolke. Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:

- Generieren von Testdaten: Schreiben Sie eine Funktion, die zu einer gegebenen Gerade, charakterisiert durch die Steigung m und den y-Achsenabschnitt y, n Punkte in $[x_A, x_E]$ generiert, die normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 0$ und einer Standardabweichung $\sigma_{x,y}$ um diese Gerade verteilt liegen. Schreiben Sie sie mit 10 Nachkommastellen in eine Textdatei. Jeder Punkt entspricht einer Zeile in der Textdatei.
  Hinweis: Berechnen Sie den exakten Punkt und addieren Sie auf jede Koordinate eine $(0, \sigma)$-normalverteilte Zufallsvariable mit *random*. Für das Erstellen der Textdatei finden Sie Hilfe in der Dokumentation von Matlab bei den Befehlen *fopen, fclose, fprintf*.

- Finden der Ausgleichsgeraden: Schreiben Sie eine Funktion, in der die Datenpunkte aus der Textdatei eingelesen werden, stellen Sie das Problem $\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2^2$ mit geeignetem A und b auf und lösen Sie das überbestimmte Gleichungssystem, wie in der Vorlesung dargestellt. Versuchen Sie den Befehl *inv* zu vermeiden und nutzen Sie optimalerweise die in der numerischen LA kennengelernte Strategie.
  Hinweis: Nutzen Sie zum Einlesen *fscanf*. Schauen Sie sich in der Dokumentation an, wie man den richtigen Datentyp und eine Matrix mit der richtigen Größe und Anordnung der Datenpunkte in jeder Zeile erhält.

- Numerisches Experiment: Schreiben Sie ein Skript, welches für $m = 5$ und $y = 1$ zehn Punkte mit $\sigma_x = \sigma_y = 2$ auf dem Intervall $[-10, 10]$ berechnet, für diese Punkte die Ausgleichsgerade berechnet und diese samt der exakten Geraden und der 2D-Punkte geeignet plottet. Versehen Sie den Plot mit einer Legende.