Prof. Dr. H. Maurer SS 89

Optimierung II

Übungsblatt 2 , Abgabe: 27.04.1989 , 10.00 Uhr

Aufgabe 4: (2+4 Punkte)

(a) Es seien $f : \mathbf{R^{n+1}} \to \mathbf{R}$, $a, b : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ C^1-Funktionen. Dann ist die Funktion $F : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ mit

$$F(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt \quad , \qquad x \in \mathbf{R^n} \quad ,$$

eine C^1-Funktion. Geben sie die Optimalittsbedingungen 1. Ordnung fr ein lokales Minimum $\overline{x}$ von F an.

(b) Die DGL

$$L[v] = \frac{dv}{dt} + t\ v = 0 \quad , \qquad v(0) = 1 \quad ,$$

hat die Lsung $v(t) = e^{-t^2/2}$. Zur nherungsweisen Bestimmung dieser Lsung im Intervall $[0,1]$ macht man den Ansatz

$$v(t) \sim w(x_1, x_2, t) = 1 + x_1 t + x_2 t^2 \quad , \qquad 0 \leq t \leq 1 \quad .$$

Man bestimme x_1, x_2 so, da beim Einsetzen von $w(x_1, x_2, t)$ in die DGL die Fehlerquadratsunmme

$$F(x_1, x_2) = \int_0^1 (L[w(x_1, x_2, t)])^2 dt$$

minimal wird.

<u>Hinweis:</u> Benutze (a) und berechne ein LGS fr x_1, x_2. Zur Kontrolle:

$$x_1 = -1.191 \quad , \qquad x_2 = 0.073$$

Aufgabe 5: (1+1+1+2 Punkte)
Fr eine Teilmenge $M \subset \mathbf{R^n}$ heit

$$M^+ := \{\lambda \in \mathbf{R^n} \quad | \quad \lambda\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad \forall \in \mathbf{M}\}$$

der Dualkegel von M.

Man zeige:

(a) M^+ ist ein abgeschlossener Kegel.

(b) Es gilt: $M^+ = (\overline{M})^+$

(c) Wie lt sich Satz (3.5) mit Hilfe des dualen Kegels ausdrcken?

(d) Zeichnen Sie den Dualkegel zur Menge.

$$M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R^2} \quad | \quad \mathbf{x_1 + x_2 \geq 1} \quad , \qquad \mathbf{x_1 - 2x_2 \geq 1}\right\}$$

Aufgabe 6: (2+1 Punkte)

(a) Beweisen Sie Lemma (A.2) (viii).

(b) Ist K ein konvexer Kegel, $x \in K$, und $K(x)$ die konische Hlle von K bzgl. x, so gilt:

$$K(x)^+ = \{\lambda \in K^+ \quad | \quad \lambda x = 0\}$$

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Beweisen Sie Lemma (3.3).

Prof. Dr. H. Maurer SS 89

Optimierung II

Übungsblatt 3 , Abgabe: 11.05.1989 , 10.00 Uhr

Aufgabe 8: (3+3 Punkte)

(a) Seien $f : \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^k} \to \mathbf{R}$, $\quad g : \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^k} \to \mathbf{R^n} \quad C^1$-Abbildungen mit $\det(g_x(x,u)) \neq 0$ fr $(x,u) \in \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^k}$. Fr das Optimierungsproblem

$$\min_{(x,u)\in\mathbf{R^n}\times\mathbf{R^k}} \{f(x,u) \quad | \quad g(x,u) = 0\}$$

gebe man notwendige Optimalittsbedingungen 1. Ordnung an. Man benutze hierfr den Satz ber implizite Funktionen und gebe das Ergebnis in Termen von f, g und deren Ableitungen an.

(b) Man lse das Optimierungsproblem

$$\min \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2}\right) \quad | \quad xu - c = 0 \right\} \quad , \qquad c > 0 \quad ,$$

grafisch und analytisch.

Aufgabe 9: (3+3 Punkte)
Seien $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ differenzierbar, $K \subset \mathbf{R^n}$ konvex, A eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbf{R^n}$.

(a) Zeigen Sie:

$$T(K, \overline{x}) = c\ell K(\overline{x}) \quad .$$

Berechnen Sie $T(K, \overline{x})$ und $L(S, \overline{x})$ im Falle $K = \{x \in \mathbf{R^n} \quad | \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$.

(b) Beweisen Sie: Ist $\overline{x}$ eine lokale Minimalstelle des Problems

$$\min\{f(x) \quad | \quad Ax = b\} \quad ,$$

so gibt es $\lambda \in \mathbf{R^m}$ mit $f'(\overline{x}) + \lambda A = 0$.

Hinweis: Benutzen sie Satz (3.5) und (a).

Aufgabe 10: (2+3+3 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ differenzierbar und sei $C \subset \mathbf{R^n}$ konvex.

Man zeige: Fr eine lokale Minimalstelle $\overline{x}$ des Problems

$$\min\{f(x) \quad | \quad x \in C\}$$

gilt

$$f'(\overline{x})(x - \overline{x}) \geq 0 \qquad \text{fr alle} \quad x \in C \quad .$$

(b) Sei $C \subset \mathbf{R^n}$ eine konvexe, abgeschlossene Menge und sei $y \notin C$.

Man zeige: Es gibt einen eindeutig bestimmten Punkt $\overline{x}$ mit

$$\|\overline{x} - y\|_2 = \min \{\|x - y\|_2 \quad |x \in C\} \quad .$$

Der Punkt $\overline{x}$ ist charakterisiert durch

$$(\overline{x} - y)^T (x - \overline{x}) \geq 0 \qquad \text{fr alle} \quad x \in C \quad .$$

$\overline{x}$ heit die Projektion von y auf C.

(c) (cone projection theorem)

Sei $K \subset \mathbf{R^n}$ ein abgeschlossener konvexer Kegel.

Man zeige: Jedes Element $y \in \mathbf{R^n}$ kann eindeutig zerlegt werden in

$$y = x_0 - x_1, \quad x_0 \in K, \quad x_1^T \in K^+, \quad x_1^T x_0 = 0,$$

wobei x_0 die Projektion von y auf K ist (vgl. (b)) und K^+ der duale Kegel ist (vgl. Aufgabe 5).

Aufgabe 11: (3 Punkte)

Sei

$$S \;=\; \Big\{(x,y) \in \mathbf{R^2} \quad | \quad 1 - x^2 - (y-1)^2 \leq 0 \quad , \quad x^2 + (y-2)^2 - 4 \leq 0 \quad , \quad -y^2 - x \leq 0\Big\} \, .$$

Man skizziere S und berechne den Tangentialkegel von S in allen Randpunkten $\overline{x}$ von S.

Prof. Dr. H. Maurer SS 89

Optimierung II

Übungsblatt 4 , Abgabe: 01.06.1989 , 10.00 Uhr

Aufgabe 12: (1+3 Punkte)
Die Mengen S_α seien gegeben durch

$$S_\alpha = \left\{ x \in \mathbf{R^2} \quad | \quad \mathbf{x_2 - x_1^\alpha \le 0}, \quad \mathbf{-x_2 - x_1^\alpha \le 0} \right\}, \quad \alpha \ge 1.$$

(a) Skizzieren Sie S_α fr $\alpha \ge 1$.

(b) Berechnen Sie die Kegel $T(S_\alpha, \overline{x})$ und $L(S_\alpha, \overline{x})$ fr $\overline{x} = (0,0)^T$, $\alpha \ge 1$. Fr welche $\alpha \ge 1$ ist $\overline{x}$ regulr?

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Sei $\overline{x}$ eine <u>regulre</u> Minimalstelle des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{llll} \min\{ f(x) & | & g_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, k \\ & & g_i(x) = 0, & i = k+1, \ldots, m\} \end{array} .$$

Beweisen Sie die Bedingungen von KUHN/TUCKER in Satz (4.4) direkt mit dem Dualittssatz der linearen Optimierung.

Aufgabe 14: (1+4+1 Punkte)
Die kostenminimale Lagerung von n Gtern fhrt auf das Optimierungsproblem (Gtermengen x_i, $i = 1, \ldots, n$)

$$(P) \quad \min \left\{ \sum_{i=1}^n \left(a_i x_i + \frac{b_i}{x_i} \right) \quad | \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i = d, \quad x > 0 \right\}$$

mit positiven Konstanten a, b_i, c_i, d.

(a) Man zeige: (P) ist ein konvexes Optimierungsproblem.

(b) Man berechne die optimale Lsung $\overline{x} \in \mathbf{R^n}$ und den zugehrigen LAGRANGE-Multiplikator $\overline{\lambda} \in \mathbf{R}$.

<u>Hinweis:</u> $\overline{\lambda}$ ist Nullstelle einer nichtlinearen Gleichung unter der Voraussetzung

$$d > \sum_{i=1}^n c_i (b_i/a_i)^{1/2} \quad .$$

(c) Man berechne $\overline{x}, \overline{\lambda}$ explizit im Falle $a_i = a\, c_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a > 0$.

Aufgabe 15: (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie:

$$\max\left\{\prod_{i=1}^{n} x_i \quad ; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \qquad \text{fr} \quad i = 1, \ldots, n\right\} = n^{-n}.$$

(b) Zeigen Sie: Fr alle $x \in \mathbf{R^n}$ mit $x \geq 0$ gilt:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad \leq \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Aufgabe 16: (3+6 Punkte)
Gegeben seien k Punkte $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R^n}$, $k > 1$. Das Problem, eine kleinstmgliche Kugel zu finden, welche $a_1, \ldots, a_k$ enthlt, fhrt auf das Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \min_{x \in \mathbf{R^n}, z \in \mathbf{R}} \quad \{f(x,z) \quad | \quad g_i(x,z) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, k\} \quad ,$$

$$f(x,z) := z \quad ,$$

$$g_i(x,z) := \|x - a_i\|^2 - z, \quad i = 1, \ldots, k$$

Es sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

(a) Man berlege, da eine optimale regulre Lsung (x_0, z_0) existiert und bestimme die Bedingungen von KUHN/TUCKER in (x_0, z_0).

***(b)** Sei $R = \sqrt{z_0}$ der Radius der Kugel und

$$d = \max_{i,j=1,\ldots,k} \|a_i - a_j\|$$

der maximale Abstand. Man beweise die Abschtzung

$$d \geq R\left(\frac{2k}{k-1}\right)^{1/2} \quad .$$

Verbessern Sie die Abschtzung mit $q :=$ Anzahl der aktiven Indizes.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und unter Verwendung von $D_{ij} = \|a_i - a_j\|^2 = \|a_i - x_0 - (a_j - x_0)\|^2$ die Beziehungen:

$$2R^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i D_{ij} \lambda_j \quad ,$$

$$\sum_{i \neq j} \lambda_i D_{ij} \lambda_j \leq d^2 \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \quad ,$$

$$\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = 1 - \sum_i \lambda_i^2 \leq 1 - \frac{1}{k}$$

Prof. Dr. H. Maurer SS 89

Optimierung II

Übungsblatt 5 , Abgabe: 08.06.1989 , 10.00 Uhr

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Bestimmen Sie smtliche lokale und globale Minimalstellen des Problems

$$\min\{x^2 + y^2 + z^2 \quad | \quad z - xy - 5 = 0\}.$$

Deuten Sie dieses Problem geometrisch.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Fr das Optimierungsproblem

$$\min\{4c - x - 3y - 20z \quad | \quad x^2 + 3y^2 - 20z^2 + c^2 = 0\}, \qquad c > 0,$$

bestimme man

(a) smtliche Punkte (x, y, z, λ), welche den Bedingungen von KUHN / TUCKER gengen.

(b) die (globale) Minimalstelle.

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Man beweise die notwendigen Bedingungen zweiter Ordnung in Satz (5.12)(i) fr Gleichungsrestriktionen $g(x) = 0$.
Hinweis: Die in Satz (3.11) angegebene Kurve $x : [-\epsilon, \epsilon] \to S$ mit

$$x(0) = \overline{x}, \quad \dot{x}(0) = v \in L(S, \overline{x})$$

ist eine C^2-Kurve. Man berechne

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))\Big|_{t=0}$$

unter Benutzung der Kuhn-Tucker-Bedingung.

Optimierung II

Übungsblatt 6 , Abgabe: 15.06.1989 , 10.00 Uhr

Aufgabe 20: (2+3+3 Punkte)
Gegeben sei das parameterabhngige Optimierungsproblem

$$\min \quad \{f(x,\epsilon) \quad | \quad g(x,\epsilon) \le 0\}, \qquad \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbf{R^2}, \quad \epsilon_1 > \mathbf{0} \quad ,$$
$$f(x,\epsilon) = x_1 + \epsilon_2 x_2 \quad , \qquad g(x,\epsilon) = x_1^2 + x_2^2 - \epsilon_1^2 \quad .$$

(a) Berechnen Sie die optimale Lsung $x = x(\epsilon)$ und den zugehrigen Multiplikator $\lambda = \lambda(\epsilon)$.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien des optimalen Wertes $f(x(\epsilon),\epsilon) = const.$ und verifizieren Sie die Schattenpreisformel in (6.18)(ii).

(c) Geben Sie die Matrizen A_0 und B_0 in (6.18)(i) an und verifizieren Sie $(dx/d\epsilon, d\lambda/d\epsilon)^T = -A_0^{-1}B_0$ durch Einsetzen der Lsungen $x(\epsilon), \lambda(\epsilon)$ aus (a).

<u>Hinweis:</u>

$$A_0^{-1} \quad = \quad \frac{1}{2\epsilon_1^2} \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{\lambda} & -\frac{x_1 x_2}{\lambda} & x_1 \\ -\frac{x_1 x_2}{\lambda} & \frac{x_1^2}{\lambda} & x_2 \\ x_1 & x_2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21: (4 Punkte)
Gegeben sei das Strungsproblem (6.4)

$$(P_\epsilon) \qquad \min_{x \in \mathbf{R^n}} \{f(x,\epsilon) \quad | \quad g(x,\epsilon) \in K\}, \quad \epsilon \in \mathbf{R^p} \quad ,$$

mit C^1-Abbildungen f, g. Es existiere eine Umgebung $E \subset \mathbf{R^p}$ von $\epsilon = 0$ und eine C^1-Abbildung $x(\cdot) : E \to \mathbf{R^n}$ mit:

(a) $x(\epsilon)$ ist lokale Minimalstelle von (P_ϵ) fr $\epsilon \in E$,

(b) fr $\overline{x} = x(0)$ ist $\Lambda(\overline{x}) = \left\{\overline{\lambda}\right\}$ einpunktig.

Man beweise die <u>Schattenpreisformel</u>

$$\frac{df(x(\epsilon),\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = L_\epsilon(\overline{x}, \overline{\lambda}, 0) \quad .$$

<u>Hinweis:</u> Untersuchen Sie die Funktion $F(\epsilon) = \overline{\lambda}(g(x(\epsilon),\epsilon) - g(\overline{x}, 0))$ in E.

Programmieraufgaben zur Optimierung II

Übungsblatt 1 , Abgabe: 26.06.1989 , 10.00 Uhr

Zur Lösung der nachfolgenden Aufgaben benutze man die FORTRAN-Programme der IMSL-Bibliothek:

(1) Quadratische Optimierung: DQPROG, S. 892-894.

(2) Nichtlineare Optimierung: DNCONF, S. 895-902; DNCONG, S. 903-908.

Die Aufgaben sind entnommen aus

(HI) D.M. HIMMELBLAU: Applied Nonlinear Programming, McGraw-Hill, 1972.

Aufgabe 1:
(HI), S. 405, 406, Problem 10
Für den Parameter $\epsilon \in [0,1]$ sei das Problem

$$\text{minimiere} \qquad f(x,\epsilon) := g^T x + x^T C x + \sum_{j=1}^{5} d_j(\epsilon x_j^2 + (1-\epsilon)x_j^3)$$

$$\text{unter} \qquad Ax \geq b, \quad x \geq 0, \quad (x \in \mathbf{R}^5),$$

gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0.4 & 2 \\ -3.5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -9 & -2 & 1 & -2.8 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 10 \times 5 \quad \text{Matrix},$$

$$\begin{aligned} b &= (-40,-2,-0.25,-4,-4,-1,-40,-40,5,1)^T \in \mathbf{R}^{10}, \\ g &= (-15,-27,-36,-18,-12)^T \in \mathbf{R}^5 \quad , \\ d &= (d_1,\ldots,d_5) = (4,8,10,6,2) \in \mathbf{R}^5 \quad , \end{aligned}$$

$$C = \begin{pmatrix} 30 & -20 & -10 & 32 & -10 \\ -20 & 39 & -6 & -31 & 32 \\ -10 & -6 & 10 & -6 & -10 \\ 32 & -31 & -6 & 39 & -20 \\ -10 & 32 & -10 & -20 & 30 \end{pmatrix} \qquad 5 \times 5 \quad \text{Matrix} \quad .$$

Man berechne die optimale Lösung $\overline{x} \in \mathbf{R}^5$ und den optimalen Wert $f(\overline{x},\epsilon)$ für die Parameter $\epsilon = 1, \quad \epsilon = \frac{1}{2}, \quad \epsilon = 0.$

Hinweis: Für $\epsilon = 1$ erhält man ein quadratisches Optimierungsproblem mit $f(\overline{x}, 1) = -29.8564$. Beachten Sie die Problemstellung im IMSL-Programm QPROG!

Aufgabe 2:
(HI), S. 415, Problem 16
Das Problem, die Fläche eines Sechzehnecks mit Durchmesser $d = 1$ zu maximieren, führt auf das Optimierungsproblem mit $x \in \mathbf{R^9}$:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{Maximiere} & \multicolumn{9}{l}{f(x) = \frac{1}{2}(x_1x_4 - x_2x_3 + x_3x_9 - x_5x_9 + x_5x_8 - x_6x_7)} \\
\text{unter} & & & & & 1 & - & x_3^2 & - & x_4^2 \geq 0 \\
 & & & & & & & 1 & - & x_9^2 \geq 0 \\
 & & & & & 1 & - & x_5^2 & - & x_6^2 \geq 0 \\
 & & & 1 & - & x_1^2 & - & (x_2 & - & x_9)^2 \geq 0 \\
 & 1 & - & (x_1 & - & x_5)^2 & - & (x_2 & - & x_6)^2 \geq 0 \\
 & 1 & - & (x_1 & - & x_7)^2 & - & (x_2 & - & x_8)^2 \geq 0 \\
 & 1 & - & (x_3 & - & x_5)^2 & - & (x_4 & - & x_6)^2 \geq 0 \\
 & 1 & - & (x_3 & - & x_7)^2 & - & (x_4 & - & x_8)^2 \geq 0 \\
 & & & 1 & - & x_7^2 & - & (x_8 & - & x_9)^2 \geq 0 \\
 & & & & & & & x_1x_4 & - & x_2x_3 \geq 0 \\
 & & & & & & & & & x_3x_9 \geq 0 \\
 & & & & & & & & - & x_5x_9 \geq 0 \\
 & & & & & & & x_5x_8 & - & x_6x_7 \geq 0 \\
 & & & & & & & & & x_9 \geq 0
\end{array}$$

Hinweis: Zum optimalen Funktionswert

$$f(\overline{x}) = 0.866025$$

gehören zwei optimale Lösungen $\overline{x} \in \mathbf{R^9}$ mit $\overline{x}_i = \overline{x}_{i+4}, \quad i = 1, 2, 3, 4$.

Man finde beide Lösungen mit Startdaten: $x_i \in [0, 1], \quad i = 1, \ldots, 9$.

Aufgabe 3:
(HI), S. 395, 396, Probleme 4, 4a
Nach der Theorie von GIBBS befindet sich ein chemisches System dann im Gleichgewicht, wenn die freie Energie des Systems

$$f(x) := \sum_{j=1}^{n} x_j \left[c_j + \ell n \, \frac{x_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \right]$$

x_j : Anzahl der Mole der j-ten Komponente des Systems,
c_j : konstant bei gegebenem Druck und gegebener Temperatur,

minimal ist unter zusätzlichen Massen-Bilanzgleichungen.
Für das System $\frac{1}{2}N_2H_4 + \frac{1}{2}O_2$ erhält man das Optimierungsproblem mit $x \in \mathbf{R^{10}}$:

$$\begin{array}{llcl}
\text{Minimiere} & f(x) & & \\
\text{unter} & g_1(x) & = & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_6 + x_{10} - 2 = 0 \,, \\
 & g_2(x) & = & x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 - 1 = 0 \,, \\
 & g_3(x) & = & x_3 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} - 1 = 0 \,, \\
 & & & x \geq 0 \,,
\end{array}$$

(das Atomgewicht von $H, N, 0$ ist $2, 1, 1$)

Konstanten:

$$\begin{array}{llll} c_1 = -6.089, & c_2 = -17.164, & c_3 = -34.054, & c_4 = -5.914 \quad , \\ c_5 = -24.721, & c_6 = -14.986, & c_7 = -24.100, & c_8 = -10.708 \quad , \\ c_9 = -26.662, & c_{10} = -22.179. & & \end{array}$$

(a) Lösen Sie das Problem mit der Beschränkung $x_j \geq 1.E-4$, $\quad j = 1, \ldots, 10$, und ersetzen Sie x_j durch $|x_j|$.

Startwerte: $x_j \in [0.05, 0.5]$, $\quad j = 1, \ldots, 10$,

Optimaler Wert: $f(\overline{x}) = -47.76$.

(b) Führen Sie die neuen Variablen $y \in \mathbf{R^{10}}$ ein durch

$$x_i = \exp(y_i) \geq 0 \quad , \qquad j = 1, \ldots, 10 \qquad ,$$

und lösen Sie das resultierende Optimierungsproblem bzgl. y.

Startwerte: $y_j \in [-2., -3.]$, $\quad j = 1, \ldots, 10$.

Benutzen sie das Programm DNCONG.

Prof. Dr. H. Maurer SS 1989

Programmieraufgaben zur Optimierung II

Übungsblatt 2 , Abgabe: 04.07.1989 , 10.00 Uhr

Aufgabe 4:
Gegeben sei das in Beispiel (7.4) betrachtete diskrete dynamische Optimierungsproblem (optimale Lagerhaltung):

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{j=1}^{N} (y_{j-1}^2 + y_{j-1} + z_{j-1} + 0.1 v_j^2 + v_j + 2 w_j^2)$$

$$\begin{array}{lrclcrcl}
\text{unter} & y_j & = & y_{j-1} & + & v_j & - & d_j \;, \\
 & z_j & = & z_{j-1} & + & w_j & & , \\
 & v_j & \le & z_{j-1} & & & & , \\
 & 0 & \le & y_j & \le & 10 & & , \qquad (j = 1, \ldots, N) \\
 & 0 & \le & z_j & \le & 50 & & , \\
 & 0 & \le & v_j & \le & 50 & & , \\
 & -5 & \le & w_j & \le & 5 & & , \\
 & y_0 & = & 0 & , & z_0 = 40 & & .
\end{array}$$

Die Nachfrage sei $(d_j) = (30, 40, 50, 30, \ldots)$.

Berechnen Sie die optimale Lsung fr $N = 3, 4$ mit dem IMSL - Programm DNCONF bzw. DN2ONF. berlegen sie dazu, da die Restriktionen $0 \le v_j \le 50$, $0 \le z_j \quad (j = 1, 2, 3, 4)$ in den brigen Restriktionen enthalten sind.

***Freiwillige Kontrolle:** Prfen Sie fr $N = 3$ die adjungierte Gleichung

$$\lambda_{j-1} = -H_{jx}(\overline{x}_{j-1}, \overline{u_j}, \lambda_j, \mu_j) \quad , \qquad j = 3, 2 \quad ,$$

in Satz (8.3)(b) explizit nach. Beachten Sie dabei das Vorzeichen der Restriktionen $g_j(x) \ge 0 \quad (j = m_e + 1, \ldots, m)$ in DNCONF.