Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 8 : Abgabe, Montag, 21.06.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 23: (4 Punkte)
Für das konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimiere} & f(x_1,x_2) & = & x_1^2 + x_2 \\ \text{unter} & g_1(x_1,x_2) & = & x_1^2 + x_2^2 - 9 \le 0 \\ & g_2(x_1,x_2) & = & x_1 + x_2 - 1 \le 0 \end{array}$$

berechne man einen Sattelpunkt $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^2_+$ der Lagrange - Funktion.

Aufgabe 24: (7 Punkte)
Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $K \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexer Kegel, $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine K-konvexe Abbildung und

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in C,\ g(x) \in K\}\ .$$

Dem Optimierungsproblem

$$(\mathrm{P}) \qquad \min\{f(x) \mid x \in S\}$$

wird das folgende Dualproblem zugeordnet:

$$(\mathrm{D}) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \varphi(\lambda) := \inf\limits_{x\in C}(f(x) + \lambda g(x)) \\ \text{auf} & R := \{\lambda \in (-K)^+ \mid \varphi(\lambda) > -\infty\}\ . \end{array}$$

(1) Zeigen Sie den schwachen Dualitätssatz: Es gilt

$$\varphi(\lambda) \le f(x) \qquad \text{für alle} \quad \lambda \in R\,, \quad x \in S\ .$$

(2) Zeigen Sie den starken Dualitätssatz: Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent

(i) $(\overline{x},\overline{\lambda}) \in C \times (-K)^+$ ist ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)$.

(ii) $\overline{x} \in S$ ist Lösung von (P) und $\overline{\lambda} \in R$ ist Lösung von (D) und es gilt $\varphi(\overline{\lambda}) = f(\overline{x})$.

(c) Zum linearen Optimierungsproblem

(P) Minimiere $f(x) = Cx$
unter

$$\begin{array}{rcl} (Ax)_i & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \left\{ \begin{array}{lcl} = b_i & , & i = 1,\dots,k \\ \le b_i & , & i = k+1,\dots,m \end{array} \right\} \\ x_j & \ge & 0 \quad \text{für } j = 1,\dots,r \le n \end{array}$$

berechne man die Funktion $\varphi(\lambda)$ und die zulässige Menge R des Dualproblems (D).