# Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 7 : Abgabe, Montag, 14.06.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

---

**Aufgabe 19:** (4 Punkte)

(a) Seien $f_j \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$ und $t_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, k)$. Für die konvexe (Beweis!) Funktion $f \in \mathrm{Conv}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} t_j f_j(x)$$

berechne man das Subdifferential $\partial f(x)$.

(b) Seien $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ reelle Zahlen und $t_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, k$. Berechnen Sie für die konvexe Funktion

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} t_j |x - a_j|$$

das Subdifferential $\partial f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 20:** (5 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f \in \mathrm{Conv}(D)$ und $x \in \mathrm{int}(D)$. Beweisen Sie die Beziehung

$$f'(x; v) = \max\{\lambda v \mid \lambda \in \partial f(x)\} \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n\ ,$$

wobei $\partial f(x)$ der Subgradient von $f$ in $x$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie für $v \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichungen

(1) $\qquad \lambda v \leq f'(x; v) \qquad \forall\, \lambda \in \partial f(x)\ .$

(2) $\qquad f'(x; v) \leq \lambda v \qquad$ für ein $\lambda \in \partial f(x)$.

Überlegen Sie zu (2), dass gilt

$$\mathrm{int}\ (\mathrm{epi}\ (f)) \cap \left\{ \begin{pmatrix} x + tv \\ f(x) + t f'(x; v) \end{pmatrix} \ \middle|\ t \geq 0 \right\} = \emptyset\ .$$

**Aufgabe 21:** (5 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathrm{Conv}(D)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für das Optimierungsproblem

$$\text{(P)} \qquad \min\{f(x) \mid x \in D\}\ .$$

(i) Jede lokale Minimalstelle $\overline{x} \in D$ von (P) ist eine globale Minimalstelle. Die Menge der optimalen Lösungen von (P) ist konvex.

(ii) Ist $f$ streng (strikt) konvex, so hat (P) höchstens eine optimale Lösung.

(iii) $\overline{x} \in D$ ist genau dann eine optimale Lösung von (p), wenn gilt $0 \in \partial f(\overline{x})$.

**Aufgabe 22: (Programmieraufgabe)** Das konjugierte Gradientenverfahren zur Minimierung einer $C^1$-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h. zur Bestimmung von $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$f(\overline{x}) = \min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\},$$

ist ein Iterationsverfahren der folgenden Form (nach FLETCHER, REEVES):

Start: $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $d^0 := -\nabla f(x^0)$

Iteration: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k$ , $k = 0, 1, \ldots$

Suchrichtung: $d^k := -\nabla f(x^k) + \gamma_k d^{k-1}$, $\gamma_k := [\|\nabla f(x^k)\| / \|\nabla f(x^{k-1})\|]^2$ für $k = 1, 2, \ldots$ .

Schrittweite: (ARMIJO - Regel) Sei $S = \{2^{-j} \mid j = 0, 1, 2 \ldots\}$. Wähle eine feste Zahl $0 < \mu < \frac{1}{2}$ und bestimme

$$\begin{aligned} \alpha_k = \max\{\alpha \in S \mid f(x^k + \alpha d^k) &\leq f(x^k) + \alpha\mu f'(x^k) d^k \\ &= f(x^k) - \alpha\mu \nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k)\} \end{aligned}$$

Abbruchkriterium: $\|\nabla f(x^k)\|_2 \leq \text{eps}$ oder $k \geq k_0$.

Schreiben Sie ein Programm zum konjugierten Gradientenverfahren. Berechnen Sie lokale Minimalstellen $\overline{x}$ zu den folgenden Testproblemen, wobei $\mu \in [0.01, 0.05]$, eps $= 10^{-5}$ und $k_0 = 5000$ gesetzt werden können.

(1) Probleme 2, 3, 4 von Aufgabe 18.

(2) Berechnen Sie eine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ des folgenden Problems der Nichtlinearen Ausgleichsrechnung:

$$\text{Minimiere} \quad \sum_{i=1}^{6} (y_i - \varphi(t_i, x))^2$$

mit den Daten

$$\varphi(t, x) = x_1 + x_2 e^{x_3 \cdot t},$$

| $i$ | $t_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | - 5 | 127 |
| 2 | - 3 | 151 |
| 3 | - 1 | 379 |
| 4 | 1 | 421 |
| 5 | 3 | 460 |
| 6 | 5 | 426 |

Start: $x^0 = (500, -160, -0.2)^T$

Lösung: $\overline{x} = (523.3, -156.9, -0.1997)^T$

**Abgabe von Aufgabe 22: Mo., 28.06.99, 9:00 Uhr**