Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 6 : Abgabe, Montag, 07.06.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 16: (3+3+3 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und seien $f_i : D \to \mathbb{R}$ konvex für alle $j \in J$ mit einer beliebigen Indexmenge J.

Zeigen Sie, daß
$$f(x) := \sup_{j \in J} f_j(x) \ \text{ konvex ist .}$$

Hinweis: Überlegen Sie, daß epi $(f) = \bigcap\limits_{j \in J}$ epi (f_j).

(b) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\|\ \cdot\ \|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, daß die Abstandsfunktion
$$d_C(x) := \inf \{\|y - x\| \mid y \in C\}$$
konvex ist.

(c) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine *beliebige* Teilmenge.

Zeigen Sie, daß die Funktion
$$\varphi_S(x) := \frac{1}{2}\{\|x\|^2 - d_S(x)^2\}$$
konvex ist, wobei die Abstandsfunktion $d_S(x)$ wie in (b) definiert ist.

Hinweis: Entwickle $d_S(x)^2$ und benutze (a).

Aufgabe 17: (5 Punkte)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die BERNSTEIN-Polynome $B_n(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvex, wobei
$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}\ , \qquad 0 \le x \le 1\ .$$

Hinweis: Berechne $B_n''(f)$.

Folgerung: $\lim\limits_{n \to \infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0$, d.h. jede konvexe Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist ein gleichmäßiger Limes konvexer Polynome.

Aufgabe 18: (Programmieraufgabe) Das Gradientenverfahren zur Minimierung einer C^1-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d.h. zur Bestimmung von $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ mit
$$f(\overline{x}) = \min \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}\ ,$$
ist ein Iterationsverfahren der folgenden Form:

Start: $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Iteration: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k\ , \quad k = 0,1,2,\ldots$

Suchrichtung: $d^k = -\nabla f(x^k)$

Schrittweite: (Armijo - Regel) Sei $S = \{2^{-j} \mid j = 0, 1, 2 \ldots\}$. Wähle eine feste Zahl $0 < \mu < \frac{1}{2}$ und bestimme

$$\begin{aligned}\alpha_k = \max\{\alpha \in S \mid f(x^k + \alpha d^k) &\leq f(x^k) + \alpha\mu f'(x^k) d^k \\ &= f(x^k) - \alpha\mu \nabla f(x^k)^T \nabla f(x^k)\}\end{aligned}$$

Abbruchkriterium: $\|\nabla f(x^k)\|_2 \leq \text{eps}$ oder $k \geq k_0$.

Schreiben Sie ein Programm zum Gradientenverfahren. Berechnen Sie lokale Minimalstellen $\overline{x}$ zu den folgenden Testproblemen, wobei $\mu = 0.1$, eps $= 10^{-5}$ und $k_0 = 500$ gesetzt werden können.

Problem 1: $f(x) = x^4 - \frac{1}{4}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \{\pm 5, \pm 0.1\}$.

Problem 2: $f(x) = x_1^2 + 25x_2^2$, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $x^0 = (2, 2)^T$.

Problem 3: (Rosenbrock-Problem)

$$\begin{aligned} f(x) &= 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2\ , \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2\ , \\ \overline{x} &= (1, 1)^T\ , \quad x^0 = (-1.2, 1)^T\ . \end{aligned}$$

Problem 4:

$$f(x) = (x_1^2 + 12x_2 - 1)^2 + (49x_1^2 + 49x_2^2 + 84x_1 + 2324x_2 - 681)^2$$

Start: $x^0 = (1, 1)^T$, $f(x^0) = 3.3306 \cdot 10^6$

Lokale Minimalstellen:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (0.28581,\ 0.27936)^T\ , \quad f(\overline{x}) = 5.9225\ ; \\ \overline{x} &= (-21.026653,\ -36.760090)^T, \quad f(\overline{x}) = 0\ . \end{aligned}$$

Problem 5*: (Schätzen von Koeffizienten aus experimentellen Daten)

$$f(x) = 10^4 \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{b_i} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 a_i + x_3^2 a_i^2}{1 + x_4^2 a_i} - b_i \right)$$

Daten:

i	a_i	b_i
1	0.0	7.391
2	0.000428	11.18
3	0.00100	16.44
4	0.00161	16.20
5	0.00209	22.20
6	0.00348	24.02
7	0.00525	31.32

Start: $x^0 = (2.7, 90, 1500, 10)^T$, $f(x^0) = 2.905 \cdot 10^4$

Lösung: $\overline{x} = (2.714, 140.4, 1707, 31.51)^T$, $f(\overline{x}) = 318.572$

Abgabe von Aufgabe 18: Mo., 14.06.99, 9:00 Uhr