Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 5 : Abgabe, Montag, 17.05.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 13: (6 Punkte)
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbare Abbildungen und seien $K \subset \mathbb{R}^m$ und $C \subset \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen.

(a) Zeigen Sie: Ist $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ eine lokale Minimalstelle des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & f(x) \\ \text{unter} & g(x) \in K\ ,\quad x \in C\ , \end{array}$$

so gibt es einen Zeilenvektor $(\lambda_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $(\lambda_0, \lambda) \neq 0$, mit

$$\begin{array}{rcll} [\lambda_0 f'(\overline{x}) + \lambda g'(\overline{x})](x - \overline{x}) & \geq & 0 & \text{für alle} \quad x \in C\ , \\ \lambda_0 \geq 0 \quad \text{und} \quad \lambda(-y) & \geq & 0 & \text{für alle} \quad y \in K(g(\overline{x}))\ . \end{array}$$

(b) Spezialisieren Sie diese Bedingungen für das quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{llcl} \text{Minimiere} & f(x) & = & \frac{1}{2}x^T D x + cx \\ \text{unter} & Ax & = & b\ , \quad x \geq 0\ , \end{array}$$

mit einer symmetrischen $n \times n$ Matrix D, einem Zeilenvektor $c \in \mathbb{R}^n$, einer $m \times n$ Matrix A mit rang $(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Beweisen Sie die Bedingungen

$$\begin{array}{rcl} x^T D + c + \lambda A & \geq & 0\ , \\ (\overline{x}^T D + c + \lambda A)\overline{x} & = & 0\ . \end{array}$$

Aufgabe 14: (5 Punkte)
Diskutieren Sie die hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung für das quadratische Optimierungsproblem

$$\min \quad \left\{ \frac{1}{2}x^T D x + cx \mid Ax = b \right\}$$

mit einer symmetrischen $n \times n$ Matrix D, einem Zeilenvektor $c \in \mathbb{R}^n$, einer $m \times n$ Matrix A mit rang $(A) = m$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Drücken Sie die Bedingungen 2. Ordnung aus mit einer $n \times (n - m)$ Matrix N, welche eine Basis von Kern (A) bildet, d.h. die Bedingungen $AN = 0$ und rang $(N) = n - m$ erfüllt. Berechnen Sie dann die optimale Lösung $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ und den Lagrange - Multiplikator $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ explizit.

Aufgabe 15: (3+2 Punkte)

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und sei $f : D \to \mathbb{R}$ konvex. Beweisen Sie die JENSEN'sche Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(x_i)$$

für alle $x_i \in D \quad (i = 1, \ldots, k)$ und $\alpha_i \geq 0$ mit $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

(b) Zeigen Sie, daß $f(x) = -\ell n(x)$ konvex auf $D = (0, \infty)$ ist. Folgern Sie daraus die Ungleichung

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \quad \text{für} \quad x_i \geq 0\ ,\ \ \alpha_i \geq 0\ ,\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\ .$$