Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 3 : Abgabe, Montag, 03.05.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 7: (3+5 Punkte)
Gegeben seien k Punkte $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $k > 1$. Das Problem, eine kleinstmögliche Kugel zu finden, welche $a_1, \ldots, a_k$ enthält, führt auf das Optimierungsproblem

$$(P) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}} \{ f(x,z) \mid g_i(x,z) \le 0, \quad i = 1, \ldots, k \} \quad ,$$
$$f(x,z) := z \quad ,$$
$$g_i(x,z) := \|x - a_i\|^2 - z, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Es sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

(a) Man überlege, daß eine optimale reguläre Lösung (x_0, z_0) existiert und bestimme die Bedingungen von KUHN/TUCKER in (x_0, z_0).

(b) Sei $R = \sqrt{z_0}$ der Radius der Kugel und

$$d = \max_{i,j=1,\ldots,k} \|a_i - a_j\|$$

der maximale Abstand. Man beweise die Abschätzung

$$d \ge R \left(\frac{2k}{k-1} \right)^{1/2} \quad .$$

Verbessern Sie die Abschätzung mit $q :=$ Anzahl der aktiven Indizes.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und unter Verwendung von $D_{ij} = \|a_i - a_j\|^2 = \|a_i - x_0 - (a_j - x_0)\|^2$ die Beziehungen:

$$2R^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i D_{ij} \lambda_j \quad ,$$

$$\sum_{i \ne j} \lambda_i D_{ij} \lambda_j \le d^2 \sum_{i \ne j} \lambda_i \lambda_j \quad ,$$

$$\sum_{i \ne j} \lambda_i \lambda_j = 1 - \sum_i \lambda_i^2 \le 1 - \frac{1}{k}.$$

Aufgabe 8: (5 Punkte)
Gegeben sei das Störungsproblem (6.4)

$$(P_\epsilon) \qquad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ f(x,\epsilon) \mid g(x,\epsilon) \in K \}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^p \quad ,$$

mit C^1-Abbildungen f, g. Es existiere eine Umgebung $E \subset \mathbb{R}^p$ von $\epsilon = 0$ und eine C^1-Abbildung $x(\cdot) : E \to \mathbb{R}^n$ mit:

(1) $x(\epsilon)$ ist lokale Minimalstelle von (P_ϵ) für $\epsilon \in E$,

(2) für $\overline{x} = x(0)$ ist $\Lambda(\overline{x}) = \left\{ \overline{\lambda} \right\}$ einpunktig.

Man beweise die Schattenpreisformel

$$\frac{df(x(\epsilon),\epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = L_\epsilon(\overline{x},\overline{\lambda},0) \quad .$$

(Hinweis: Untersuchen Sie die Funktion $F(\epsilon) = \overline{\lambda}(g(x(\epsilon),\epsilon) - g(\overline{x},0))$ in E.)

Wann sind für das gestörte LP

$$\min\{c(\varepsilon)x \mid Ax = b(\varepsilon), x \geq 0\}\ , \quad \varepsilon \in E \subset \mathbb{R}^p\ ,$$

die Voraussetzungen (1) und (2) erfüllt?

Aufgabe 9: (3 Punkte)
Sei $w : \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ die Optimalwert-Funktion des parametrischen LP

$$P(t) \qquad \min\{c(t)x \mid Ax = b\ ,\ \ x \geq 0\}\ , \quad t \in \mathbb{R}^k,$$

mit einer affin-linearen Funktion $c : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie:

(a) Die Menge $D = \{t \in \mathbb{R}^k \mid w(t) \in \mathbb{R}\}$ ist konvex.

(b) Die Funktion $w : D \to \mathbb{R}$ ist konkav.