Übungen zur Vorlesung OPTIMIERUNG II

Übungsblatt 2 : Abgabe, Montag, 26.04.1999, 9:00 Uhr, Übungskästen 38, 39

Aufgabe 4: (5 Punkte)
Mit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ sei das Problem

$$\begin{array}{ll} \text{maximiere} & f(x_1,\ldots,x_n) = \det(x_i^T x_j)_{i,j=1,\ldots,n} \\ \text{unter} & \\ & g(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} x_1^T x_1 - 1 \\ \vdots \\ x_n^T x_n - 1 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

zu lösen.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine globale Maximalstelle $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ des Problems mit (1) $f(\overline{x}) = 1$, (2) $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ ist ONS.

<u>Hinweis:</u> Berechnen Sie $f'(\overline{x})v + \lambda g'(\overline{x})v$ für $v \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$.

(b) Folgern Sie aus (a) die HADAMARD'sche Determinantenungleichung

$$|\det(x_i^T x_j)| \le \prod_{i=1}^{n} x_i^T x_i \qquad \text{für alle} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \cdot n} .$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Man beweise die notwendigen Bedingungen 2. Ordnung in Satz 5.12(i) für Optimierungsprobleme mit Gleichungsrestriktionen $g(x) = 0$. Der Punkt $\overline{x}$ sei normal.

<u>Hinweis:</u> Die in Satz 3.11 angegebene Kurve $x : [-\varepsilon, \varepsilon] \to S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ mit

$$x(0) = \overline{x} \ , \quad \dot{x}(0) = v \in L(S, \overline{x})$$

ist eine C^2-Kurve. Berechnen Sie dann

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x(t))|_{t=0}$$

unter Verwendung der Kuhn-Tucker-Bedingungen.

Aufgabe 6: (2+3+3 Punkte)
Gegeben sei das parameterabhängige Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min \quad \{f(x,\epsilon) \quad | \quad g(x,\epsilon) \le 0\}, & \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbf{R^2}, \quad \boldsymbol{\epsilon_1 > 0} \quad , \\ f(x,\epsilon) = x_1 + \epsilon_2 x_2 \quad , & g(x,\epsilon) = x_1^2 + x_2^2 - \epsilon_1^2 \quad . \end{array}$$

(a) Berechnen Sie die optimale Lösung $x = x(\epsilon)$ und den zugehörigen Multiplikator $\lambda = \lambda(\epsilon)$.

(b) Skizzieren Sie die Niveaulinien des optimalen Wertes $f(x(\epsilon), \epsilon) = \mathit{const.}$ und verifizieren Sie die Schattenpreisformel in (6.18)(ii).

(c) Geben Sie die Matrizen A_0 und B_0 in (6.18)(i) an und verifizieren Sie $(dx/d\epsilon, d\lambda/d\epsilon)^T = -A_0^{-1} B_0$ durch Einsetzen der Lösungen $x(\epsilon), \lambda(\epsilon)$ aus (a).

Hinweis:

$$A_0^{-1} \quad = \quad \frac{1}{2\epsilon_1^2} \quad \begin{pmatrix} \frac{x_2^2}{\lambda} & -\frac{x_1 x_2}{\lambda} & x_1 \\ -\frac{x_1 x_2}{\lambda} & \frac{x_1^2}{\lambda} & x_2 \\ x_1 & x_2 & -\lambda \end{pmatrix}$$