Optimierung 1

Übungsblatt 2 , Abgabe: 31.10.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Eine Fabrik hat zwei Maschinen, M_1 und M_2 zur Herstellung zweier Produkte P_1 und P_2. Welches Herstellungsprogramm ergibt maximalen Gewinn pro Stunde bei Belegungszeiten und Preisen nach folgender Tabelle? (Man nimmt an, da es keine Rolle spielt, ob die Maschinen ganzzeitig ausgenutzt werden oder nicht.)

		P_1	P_2
Belegungszeit (min)	M_1	6	1
	M_2	3	4
Gewinn (DM)		30	20

Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem und lösen Sie es graphisch.

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Der Besitzer einer kleinen Schuhfabrik will je ein Modell eines Damen- und eines Herrenschuhs herstellen. Seine Belegschaft von 40 Angestellten und der Maschinenpark von 10 Maschinen sollen so eingesetzt werden, da der Gewinn maximal wird. Die Herstellung der Schuhe unterliegt bestimmten Nebenbedingungen, die in der folgenden Tabelle enthalten sind:

	Damenschuh	Herrenschuh	verfügbar
Herstellungszeit (h)	20	10	8000
Maschinenbearbeitung (h)	4	5	2000
Lederbedarf (dm^2)	6	15	4500
Reingewinn	16	32	

Formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem und lösen Sie es graphisch.

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Drei Gase mit den in der folgenden Tabelle angeführten Konstanten sollen so gemischt werden, da ein möglichst billiges Mischgas mit einem Heizwert H von über 3000 $kcal/m^3$ und einem Schwefelgehalt S von höchstens 3 g/m^3 entsteht.

Gas-Nr.	1	2	3	Einheit
Preis P_i	10	30	20	DM/1000 m^3
Heizwert h_i	1000	3000	6000	kcal/m^3
Schwefel s_i	8	1	2	g/m^3

Bezeichnen sie die Mengenanteile der einzelnen Gase pro m^3 Mischgas mit x_i und formulieren Sie das lineare Optimierungsproblem.

Aufgabe 8: (3 Punkte)

Zeigen Sie: Die Menge der optimalen Lösungen eines linearen Optimierungsproblems der Form

$$\min\left\{c^T x \quad | \quad Ax = b, x \geq 0\right\}$$

ist konvex.

Prof. Dr. H. Maurer WS 88/89

Optimierung 1

Übungsblatt 2 , Abgabe: 31.10.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 5: (5 Punkte)
Zeige:

i) Sind $K_1 \subset \mathbf{R^n}$ und $K_2 \subset \mathbf{R^n}$ konvex, so ist

$$\alpha K_1 + \beta K_2 := \{\alpha x + \beta y \quad | \quad x \in K_1,\ y \in K_2\}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

konvex.

ii) $K \subset \mathbf{R^n}$ konvex $\Rightarrow$ das topologische Innere $\overset{\circ}{K}$ und der topologische Abschluß $\overline{K}$ sind konvex.

iii) Ist K konvex, $x \in \overset{\circ}{K}$, $y \in \overline{K}$, so gilt

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in \overset{\circ}{K} \qquad \text{fr} \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Aufgabe 6: (4 Punkte)

a) Sei $K \subset \mathbf{R^n}$ konvex, $\qquad x^0, \ldots, x^k \in K$.

<u>Beh.:</u>

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i \in K, \qquad \alpha_i \geq 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1$$

b) Fr $x^0, \ldots, x^k \in \mathbf{R^n}$ gilt:

$$co(x^0, \ldots, x^k) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x^i \quad | \quad \alpha_i \geq 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 1 \right\}$$

c) Fr $M \subset \mathbf{R^n}$ gilt:

$$co(M) = \bigcup_{k \in \mathbf{N}, \mathbf{x^0}, \ldots, \mathbf{x^k} \in \mathbf{M}} co(x^0, \ldots, x^k)$$

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Sei $M \subset \mathbf{R^n}$ konvex. Zeige:

$$p \in M \quad \text{ist extremal} \quad \Longleftrightarrow \quad M \setminus \{p\} \quad \text{ist konvex}$$

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Aus Rosinen, Nüssen und Puffreis soll Studentenfutter hergestellt werden. Die Mischung soll mindestens $\frac{1}{3}$ Rosinen, mindestens halbsoviel und hchstens ebensoviel Nüsse wie Rosinen, mindestens halbsoviel Puffreis wie Rosinen und mindestens halbsoviel Nüsse wie Puffreis enthalten. Die Preise sind fr Rosinen $1,40 DM$, Puffreis $1,10 DM$, Nüsse $1,80 DM$ jeweils pro Kilogramm. Es soll eine Mischung hergestellt werden, die den aufgefhrten Bedingungen genügt und deren Preis minimal ist. Man setze r-Anteil der Rosinen pro Kilogramm, n und p analog. Benutzen Sie die Gleichung $1 = p + n + r$, um eine Variable zu eliminieren und lsen Sie das Problem graphisch.

Optimierung 1

Übungsblatt 3 , Abgabe: 07.11.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 9: (2 Punkte)
Man zeige: Es gibt keine Lösung $x \geq 0$ von

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: (3 Punkte)
Seien $K_1, K_2 \subset \mathbf{R}^n$ konvexe Mengen, $K_1 \cap K_2 = 0$. Zeige: K_1 und K_2 sind trennbar.

Hinweis: Definiere

$$K := \bigcup_{y \in K_2} \{y - x \quad | \quad x \in K_1\} = K_2 - K_1$$

und zeige: K ist konvex. Wende dann den Trennbarkeitssatz an.

Aufgabe 11: (4 Punkte)

a.) Sei K eine konvexe Menge in $\mathbf{R}^n$, K^* eine konvexe Menge in $\mathbf{R}^m$. Sei $A : K \to K^*$ eine affin lineare Abbildung mit der Eigenschaft: $\forall x^* \in K^*$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $x \in K$ mit $Ax = x^*$.

Zeige: Es existiert eine eindeutige Beziehung zwischen den Extremalpunkten von K und K^*.

b.) Beweise mit Hilfe von a) Lemma 3.8 der Vorlesung.

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Eine Firma stellt Gefriertruhen und Kühlschränke her. Bei der Herstellung muß folgendes beachtet werden:

a.) Die Abteilung, die die Gehäuse herstellt, kann in einem Monat höchstens 1000 Gehäuse fertigstellen.

b.) Die Montageabteilung fr Gefriertruhen kann in einem Monat höchstens 600 Gefriertruhen montieren.

c.) Die Montageabteilung fr Kühlschrnke kann in einem Monat höchstens 800 Kühlschränke montieren.

d.) Die Abteilung fr die elektrische Installation kann in einem Monat höchstens 800 Gefriertruhen oder 1200 Kühlschränke oder eine entsprechende lineare Kombination im Monat herstellen.

Der Gewinn bei einer Gefriertruhe beträgt $360 DM$, bei einem Kühlschrank $270 DM$.

Formulieren Sie das zugehörige LP. Bestimmen Sie sämtliche Ecken der zulässigen Menge und berechnen Sie die optimale Ecke.

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Gegeben seien die Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\
x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_5 & = & 1 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_6 & = & 3 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_7 & = & 4
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, 7.$$

Berechne die Basislösungen zu

i) B = (4, 5, 6, 7)

ii) B = (1, 2, 4, 6)

iii) B = (2, 3, 4, 7)

Welche davon sind zulässig?

Optimierung 1

Übungsblatt 4 , Abgabe: 14.11.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 14: (3 Punkte)
Zeige: Der Punkt $x = (0, 4, 1, 0, 6)^T$ ist eine Lösung des LP

maximiere $\quad (0, 1, -4, 0, 2)x \qquad$ unter

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -10 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0.$$

Aufgabe 15: (3 Punkte)
Man zeige, da das LP

maximiere $\quad (4, 2, -11, 2, -3)x \qquad$ unter

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0, \qquad x \in \mathbf{R}^5$$

keine Lösung besitzt.

Aufgabe 16: (2 Punkte)
Man gebe ein Beispiel an, in dem eine entartete Basis-Lösung optimal ist, ohne daß die Bedingung $r_N \leq 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Lse das LP

maximiere $\quad z(x) = 2x_1 + 3x_2 \qquad$ unter

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 12x_2 & + & x_3 & = & 30 \\ 20x_1 & + & 10x_2 & + & x_4 & = & 50 \\ 20x_1 & + & 20x_2 & + & x_5 & = & 60 \end{array}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 5$$

mit dem Simplex-Verfahren.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix, $B = (1, \ldots, m)$, $\quad A_B = I$, $\quad p \in B$, $\quad s \in N$ eine Basis mit $a_{ps} \neq 0$.
Erzeuge mittels elementarer Zeilenoperatoren den Einheitsvektor $e_p \in \mathbf{R}^m$ in Spalte s.
Wie lauten die Elemente der neuen Matrix $A' = (a'_{ij})$?

Optimierung 1

Übungsblatt 5 , Abgabe: 21.11.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Lsen Sie das LP

maximiere $z = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$ unter

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{1}{2}x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 24 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 60 \\ x & \geq & 0 & & & & \end{array}$$

mit dem Simplex-Verfahren.

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Der Barkeeper Ihrer Stammkneipe bittet Sie um Ihre Mithilfe:

Er hat folgendes Flaschensortiment auf Lager:

1 quart (32$oz.$) Old Cambridge (guter Whiskey - Kosten: 8\$/$quart$)

1 quart Joy Juice (ein weiterer guter Whiskey - Kosten: 10\$/$quart$)

1 quart Ma's Wicked Vermouth (10\$/$quart$)

2 quarts Gil-boy's Gin (6\$/$quart$)

Da er neu in seinem Metier ist, benutzt er nur die folgenden Drinks:

Whiskey Sour	2$oz.$Whiskey	Preis	1$
Manhattan	2$oz.$Whiskey	Preis	2$
	1$oz.$Vermouth		
Martini	2$oz.$Gin	Preis	2$
	1$oz.$Vermouth		
Pub Special	2$oz.$Gin	Preis	3$
	2$oz.$Whiskey		

Maximieren Sie den Profit der Bar mit Hilfe des Simplex-Verfahrens.

(Sind die Kosten fr die Flaschen in dieser Formulierung zu beachten?)

Aufgabe 21: (5 Punkte)
Lsen Sie das LP

maximiere $\frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4$ unter

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \frac{1}{4}x_1 & - & 60x_2 & - & \frac{1}{25}x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & - & 90x_2 & - & \frac{1}{5}x_3 & + & 3x_4 & \leq & 0 \\ & & & & & & x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

$$x \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^4$$

mit dem Simplex-Verfahren und der lexikographischen Zeilenauswahlregel (4.23).

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Lsen Sie das folgende LP mit Hilfe der Zweiphasenmethode:

maximiere $\qquad (1,2,3)x \qquad$ unter

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x \geq 0, \qquad x \in \mathbf{R}^3$$

Optimierung 1

Übungsblatt 6 , Abgabe: 28.11.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Hat das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & \leq & 60, \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_5 & = & 12, \\ x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 10, \\ 2x_1 & + & 2x_3 & & & & & \geq & 30, \\ & & & & & & x & \geq & 0, \end{array}$$

eine Lsung?

Hinweis: Benutzen Sie das Simplex-Verfahren.

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Das in Aufgabe 3 betrachtete Problem einer kostenminimalen Gasmischung fhrt auf das LP

minimiere $z = 10x_1 + 30x_2 + 20x_3$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & \geq & 3 \\ & 8x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & & x & \geq & 0 \quad . \end{array}$$

Man lse das Problem mit der Zweiphasenmethode.

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Lsen Sie mit Hilfe des revidierten Simplex-Verfahrens das Problem

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{maximiere} & 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & & & & \\ \text{unter} & x_1 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & \leq & 6 \\ & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & & & \leq & 12 \\ & x_1 & - & 4x_3 & & & & & & & \leq & 8 \\ & & & & & & & x & & & \geq & 0 \quad . \end{array}$$

Prof. Dr. H. Maurer WS 88/89

Optimierung 1

Übungsblatt 7 , Abgabe: 05.12.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 30: (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Das duale Problem zum dualen Problem ist das primale Problem.

(b) Berechnen Sie das duale Problem zu

$$\min\{cx \quad | \quad A_1x \geq b_1, \quad A_2x = b_2, \quad x \geq 0\}$$

mit Matrizen A_1, A_2 passender Dimension.

$*$**Aufgabe 31:** (5 Punkte)
Bei der Lsung des Problems

$$(P) \qquad \min\{cx \quad | \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0\}, \quad c \geq 0$$

mit dem dualen Simplex-Verfahren lst man

$$(P_1) \qquad \min\{cx \quad | \quad -Ax + y = -b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

vom "dualen Standpunkt". Die optimale Lsung sei nicht entartet.
Zeigen Sie: Die optimale Lsung λ des dualen Problems

$$(P^*) \qquad \max\{\lambda b \quad | \quad \lambda A \leq c, \quad \lambda \geq 0\}$$

erhlt man aus dem optimalen Tableau folgendermaen:

(a) y_j Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = 0$,

(b) y_j Nicht-Basis-Variable $\Rightarrow \lambda_j = -r_{k_j}$, r_{k_j} ist der unter y_j stehende Koeffizient.

Hinweis: Zeigen Sie, da zwischen der Lsung $\tilde{\lambda}$ des dualen Problems von (P_1) und der Lsung λ von (P^*) die Beziehung $\lambda = -\tilde{\lambda}$ gilt.

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Lsen Sie

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{minimiere} & 6x_1 & + & 18x_2 & + & 15x_3 & + & 12x_4 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \geq & 5 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \geq & 2 \\
 & & & x_2 & & & + & 2x_4 & \geq & 2 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \geq & 1 \\
 & & & & & & & x & \geq & 0
\end{array}$$

mit dem dualen Simplex-Verfahren. Bestimmen Sie die optimale Lsung des dualen Problems und verifizieren Sie die Aussage in Korollar (7.4).

Aufgabe 33: (5 Punkte)
Ein Nikolaus hat Lakritzstangen der Lnge 20 cm auf Lager. Zur Bescherung bentigt er

mindestens	4000	Lakritzstangen der Lnge	9 cm,
mindestens	5000	Lakritzstangen der Lnge	8 cm,
mindestens	3000	Lakritzstangen der Lnge	6 cm .

Wie mu der Nikolaus die 20 cm langen Lakritzstangen zuschneiden, damit der Abfall mglichst gering wird?

Hinweis: Es gibt 6 Strategien (Begrndung), die 20 cm langen Stangen zuzuschneiden. Setze $x = (x_1, \ldots, x_6)^T$, wobei x_i die Anzahl der Stangen ist, die nach Strategie i zugeschnitten werden. Lse das Problem mit dem dualen Simplex-Verfahren.

Prof. Dr. H. Maurer WS 88/89

Optimierung 1

Übungsblatt 8 , Abgabe: 12.12.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 30: (6 Punkte)
Lsen Sie das LP

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\text{Maximiere} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & \leq & 6, \\
 & x_1 & & & & & + & x_4 & & & \geq & 1, \\
 & -2x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & \geq & 4, \\
 & & & x_2 & + & 2x_3 & & & + & 2x_5 & = & 11, \\
 & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 6, \\
 & & & & & & & & & x & \geq & 0,
\end{array}
$$

mit der Dreiphasenmethode. Der optimale Wert ist $z_0 = 16\frac{3}{4}$.

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei $x \in \mathbf{R^n}$ optimal fr das LP

$$(P) \qquad \min \{cx \quad | \quad Ax = b, \quad x \geq 0\}$$

zur Basis B bzw. Nichtbasis N.

Man zeige:

(a) $r_N < 0 \Rightarrow x$ eindeutig

(b) $r_N \leq 0,\ r_j = 0$ fr ein $j \in N,\ x_B > 0 \Rightarrow \quad (P)$ mehrdeutig lsbar

Aufgabe 32: (2+3 Punkte)
Man berechne smtliche optimalen Lsungen der folgenden primalen und der dazu dualen LP:

(a)

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
 & & & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Man lse diese Aufgabe graphisch.

(b)

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{unter} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq & 10 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 5 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 20 \\
 & & & & & & \geq & 0
\end{array}
$$

Optimierung 1

Übungsblatt 9 , Abgabe: 19.12.1988 , 10.00 Uhr

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Sei $w : \mathbf{R}^k \to \overline{\mathbf{R}}$ die Optimalwert-Funktion

$$w(t) = \inf_{x \in \mathbf{R}^n} \{c(t)x \quad | \quad Ax = b, \quad x \geq 0\}, \quad t \in \mathbf{R}^k \quad ,$$

$$c(t) \quad \text{affin linear} \quad ,$$

eines parametrischen LP. Man zeige:

(a) Die Menge $D := \{t \in \mathbf{R}^k \quad | \quad w(t) \in \mathbf{R}\}$ ist konvex.

(b) Die Funktion $w : D \to \mathbf{R}$ ist konvex.

Aufgabe 34: (5 Punkte)
Man lse das parametrische LP

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{maximiere} & z(t) & = & (2+t)x_1 & + & (2-t)x_2 & + & 4x_3 \\
\text{unter} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 20 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & \leq & 35 \\
 & x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & \leq & 56
\end{array}$$

fr alle $t \in \mathbf{R}$.

Aufgabe 35: (5 Punkte)
Man lse das parametrische LP

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{maximiere} & z & = & 20x_1 & + & 10x_2 & + & 30x_3 & & & & \\
\text{unter} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 5 & - & 2t \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \geq & 2t & + & 2
\end{array}$$

und das dazu duale LP fr alle $t \in \mathbf{R}$.

Optimierung 1

Übungsblatt 10 , Abgabe: 16.1.1989 , 10.00 Uhr

Aufgabe 36: (2+1+2+3 Punkte)
Sei $D \subset \mathbf{R^n}$ konvex.

(a) Man zeige: $f \in \text{Conv}(D)$ genau dann, wenn

$$epi(f) = \{(x,r) \in \mathbf{R^n} \times \mathbf{R} \quad | \quad f(x) \leq r\}$$

konvex ist.

(b) Man zeige: Gilt $f \in \text{Conv}(D)$ und ist $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ monoton wachsend und konvex, so gilt: $g \circ f \in \text{Conv}(D)$

(c) Man zeige: Gilt $f_i \in \text{Conv}(D)$ fr $i \in I$, I Indexmenge.

$$D_0 := \{x \in D \mid \sup_{i \in I} f_i(x) < \infty\},$$

so gilt

(i) D_0 ist konvex.

(ii)

$$f := \sup_{i \in I} f_i \in \text{Conv}(D_0).$$

(d) Fr $x \in \mathbf{R^n}$ sei:

$$\begin{aligned} \| x \|_1 &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \| x \|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \\ \| x \|_\infty &:= \max_{i \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

Man zeige:

(i) Alle drei Normen $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_\infty$ sind konvexe Funktionen von $\mathbf{R^n}$ nach $\mathbf{R}$.

(ii) Sind $x, y \in \mathbf{R^n}$ linear unabhngig, so gilt:

$$\| \alpha x + (1-\alpha) y \|_2 < \alpha \| x \|_2 + (1-\alpha) \| y \|_2, \qquad 0 < \alpha < 1$$

(strikt konvex)

(iii) Aussage (ii) gilt nicht fr $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_\infty$.

Aufgabe 37: (2+3 Punkte)

(a) Man bestimme die grte konvexe Menge $D \subset \mathbf{R^2}$, so da

$$f(x,y) = (x+y)^2 + \frac{1}{3}(x+y)^3$$

konvex bzw. strikt konvex auf D ist.

(b) Zeigen Sie, da die Funktion

$$f(x,y) = (x+y)^3 - \int_{-\infty}^{x-y} \exp(-t^2/2)dt$$

strikt konvex fr $2 \leq x \leq 4, \ -1 \leq y \leq 0$ ist.

Aufgabe 38: (3+3+2 Punkte)

(a) Seien $D \subset \mathbf{R^n}$ konvex, $f \in \mathrm{Conv}(D)$, $x \in \mathrm{int}(D)$ und f differenzierbar in x. Man zeige:

$$\partial f(x) = \{f'(x)\}$$

(b) Sei $D = [-1,1] \subset \mathbf{R}$ und sei $f(x) = |x|$ fr $x \in D$. Man berechne $\partial f(x)$ fr alle $x \in D$.

(c) Sei $f(x) = \max\{x^2, x+2\}$ fr $x \in \mathbf{R}$. Man zeige, da f konvex ist (Skizze !) und berechne $\partial f(x)$ fr alle $x \in \mathbf{R}$.

Aufgabe 39: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Lsung $(\overline{x}, \overline{y})$ des folgenden Optimierungsproblems auf grafischem Wege:

$$\min\{f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 \quad | \quad g_1(x,y) = x+y-2 \leq 0, \quad g_2(x,y) = x^2 - y \leq 0\}$$

Zeichnen Sie die Gradienten

$$\triangledown f(\overline{x},\overline{y}), \ \triangledown g_1(\overline{x},\overline{y}), \ \triangledown g_2(\overline{x},\overline{y})$$

und berechnen Sie $\lambda = (\lambda_1, \ \lambda_2) \geq 0$ mit

$$\triangledown f(\overline{x},\overline{y}) + \lambda_1 \triangledown g_1(\overline{x},\overline{y}) + \lambda_2 \triangledown g_2(\overline{x},\overline{y}) = 0.$$

Wir wnschen allen bungsteilnehmern ein

FROHES WEIHNACHTSFEST

und ein

GUTES NEUES JAHR 1989

Optimierung 1

Übungsblatt 11 , Abgabe: 23.01.1989 , 10.00 Uhr

Aufgabe 4: (5 Punkte)
Man zeige: Ist $f_1,\ f_2 \in \mathrm{Conv}(\mathbf{R^n})$, so gilt

$$\partial(f_1+f_2)(x) = \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \qquad \text{fr alle} x \in \mathbf{R^n}.$$

<u>Hinweis:</u> Zum Nachweis von $\partial(f_1+f_2)(x) \subset \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$ betrachte man fr $\mu \in \partial(f_1+f_2)(x)$ die konvexen Mengen in $\mathbf{R^n} \times \mathbf{R}$:

$$\begin{array}{lcll} C_1 & := & \{(y, f_1(x+y) - f_1(x) + r_1) & \mid \quad y \in \mathbf{R^n}, \quad \mathbf{r_1 \geq 0}\}, \\ C_2 & := & \{(z, \mu z - f_2(x+z) + f_2(x) - r_2) & \mid \quad z \in \mathbf{R^n}, \quad \mathbf{r_2 > 0}\}. \end{array}$$

Man zeige $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ und wende den Trennungssatz (A.6) an.

Beachten Sie, da die Abschtzung im Trennungssatz fr alle $y, z \in \mathbf{R^n}$ gilt!

Aufgabe 5: (2+2 Punkte)
Sei D eine positiv definite, symmetrische (n,n)-Matrix, A eine (m,n) - Matrix mit $m < n$, $\mathrm{rang}(A) = m$, $N := A^T$ (n,m) - Matrix.

(a) Fr $y \in \mathbf{R^n}$ berechne man die Lsung des gewichteten linearen Ausgleichsproblems

$$\min_{u \in \mathbf{R^m}} f(u) = (y - Nu)^T D^{-1} (y - Nu)$$

in der Form $u = N^* y$ mit einer (m,n)-Matrix N^* (<u>Pseudoinverse</u> von N bzgl. D).

(b) Sei $c \in \mathbf{R^n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R^m}$. Berechnen Sie den Sattelpunkt $\overline{x} \in \mathbf{R^n}$, $\overline{\lambda} \in \mathbf{R^m}$ fr das quadratische Optimierungsproblem

$$\min\{cx + \frac{1}{2}x^T D x \quad \mid \quad Ax = b\}$$

mittels der Pseudoinversen N^* zu $N = A^T$.

<u>Hinweis:</u> $\overline{x}$, $\overline{\lambda}$ gengen $n+m$ linearen Gleichungen.

Aufgabe 6: (2+2+2 Punkte)
Sei $\overline{x} \in \mathbf{R^2}$ die optimale Lsung des Problems

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} \quad \text{maximiere} & & \exp\left[(x_1-1)^2 + (x_2-2)^2)\right] \\ \qquad\qquad \text{unter} & & x_2^2 \leq x_1 \quad , \quad e^{-x_1} \leq x_2, \quad 2(x_1-1)^2 \leq x_2 \end{array}$$

(a) Man zeige, da (P) ein konvexes Optimierungsproblem ist und bestimme die Lage von $\overline{x}$ auf grafischem Wege.

(b) Reduzieren Sie das aus (a) resultierende nichtlineare Gleichungssystem auf ein Iterationsverfahren in $\mathbf{R}$ und berechnen Sie $\overline{x}$ numerisch auf 5 Dezimalen.

(c) Man berechne den zu $\overline{x}$ gehrigen LAGRANGE-Multiplikator $\overline{\lambda} \in \mathbf{R^3}$ aus den KUHN / TUCKER - Bedingungen.

Prof. Dr. H. Maurer WS88/89

Programmieraufgaben zur Optimierung 1

Übungsblatt 1 , Abgabe: 12.12.1988 , 10.00 Uhr

I. Simplex-Verfahren

Implementieren Sie das im Skript S. 4.19 ff angegebene Simplex-Verfahren in einer in der numerischen Mathematik gebruchlichen Programmiersprache (d. h. FORTRAN, PASCAL, PL/1).

Aufgabe 1:
berprfen Sie die Korrektheit Ihres Programms anhand von Aufgabe 19.

Aufgabe 2:
Die optimale Herstellung von 8 Produkten aus 9 Rohstoffen fhrt auf das folgende LP:

$$\max \quad \{cx \mid Ax \le b, \quad x \ge 0\} \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} c &= (15, 15, 30, 20, 20, 40, 25, 18) \\ b &= (150, 250, 100, 300, 200, 400, 500, 550, 350)^T \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 2 & 0 & 0 & 1.5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1.2 & 1 & 0.5 & 0.4 & 3 & 3 & 1 \\ 0.5 & 0.4 & 1.5 & 1 & 1.5 & 3.2 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.5 & 1 & 1.4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 2 & 1.5 & 4 & 0 & 2 \\ 1.5 & 1.2 & 1.1 & 1.3 & 2 & 1.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.7 & 1.5 & 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.7 & 0.6 & 0.5 & 2.5 & 2 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die optimale Lsung mit Ihrem Programm und lassen Sie das optimale Tableau ausdrucken. Der Zielfunktionswert ist $z = 6346.53$.

Aufgabe 3:
Der optimale Zuschnitt von 100 000 m^3 Eichenstammholz fhrt auf das folgende LP:

maximiere $\quad 1440x_1 + 1920x_2 + 1720x_3 + 1666x_4 + 1802x_5$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{unter} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 100000 \\ & 0.1x_1 & + & 0.1x_4 & + & 0.05x_5 & & & & & \ge & 1000 \\ & 0.3x_1 & + & 0.3x_4 & + & 0.25x_5 & & & & & \ge & 5000 \\ & 0.4x_2 & + & 0.15x_5 & & & & & & & \le & 20000 \\ & 0.1x_2 & + & 0.5x_3 & + & 0.15x_4 & + & 0.12x_5 & & & \ge & 5000 \\ & 0.1x_2 & + & 0.5x_3 & + & 0.15x_4 & + & 0.12x_5 & & & \le & 10000 \\ & 0.4x_1 & + & 0.5x_2 & + & 0.5x_3 & + & 0.41x_4 & + & 0.43x_5 & \le & 45000 \end{array}$$

$$x_i \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, 5$$

Berechnen Sie die Lsung dieses LP's mit Ihrem Programm und lassen Sie das optimale Tableau, sowie das Starttableau fr Phase 2 ausdrucken. Die (ganzzahlige gerundete) optimale Lsung ist: $x = (12121,\ 27273,\ 0,\ 0,\ 60606)$.

Prof. Dr. H. Maurer WS88/89

Programmieraufgaben zur Optimierung 1

Übungsblatt 2 , Abgabe: 23.01.1989 , 10.00 Uhr

II. Duales Simplex-Verfahren

Lsen Sie die beiden folgenden Aufgaben mit dem Simplex-Verfahren. Programmieren Sie entweder das duale Simplex-Verfahren (7.12) oder benutzen Sie das Simplex-Verfahren (4.20) fr das duale Problem.

Aufgabe 4:
Fnf Metallteile sollen aus einheitlichen Blechtafeln geschnitten werden. Hierzu gibt es 10 Schnittplne. Das Problem, bei vorgegebener Mindestzahl fr jedes der fnf Metallteile mglichst wenig Blechtafeln zu verbrauchen, fhrt auf das folgende LP:

$$\min \quad \{cx \quad | \quad Ax \geq b, \quad x \geq 0\}$$

mit

$$\begin{aligned} c &= (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) \\ b &= (600,350,475,700,850)^T \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 2 & 0 & 7 & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 5 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der optimale Zielfunktionswert betrgt: $z = 241.147$

Aufgabe 5:
Die Geschftsleitung einer groen Gemeinschaftskche hat beschlossen, das Speiseprogramm so zu bestimmen, da unter Einhaltung der pro Kopf vorgeschriebenen Nhrstoffe die Menge der hierzu bentigten Rohmaterialien minimal sei.

Die Nhrstoffgehalte der verwendeten Rohstoffe sowie der tgliche Bedarf eines Menschen sind in der folgenden Tabelle zusammengefat:

Ferner mu man bercksichtigen:

1. 60 g Eiwei mssen aus tierischem Eiwei gedeckt werden.
2. Der tgliche Zuckerverbrauch darf nicht hher als 100 g sein.
3. Der monatliche Verbrauch an Hlsenfrchten darf 1000 g nicht berschreiten.
4. Der monatliche Verbrauch an Obst mu mindestens 4000 g sein.

<u>Teil (A):</u> Lsen Sie das Problem mit der Zielfunktion

$$z = cx = \sum_{i=1}^{15} x_i .$$

Fr die mit dem dualen Simplex-Verfahren berechnete, optimale Lsung gilt:

$$z = 1.4244; \qquad 4, 2, 14, 5, 6, 7, 9, 10, 13 \in N.$$

<u>Teil (B):</u> Man betrachte die Zielfunktion

$$z_j = (1-t)x_j + \sum_{i=1,\, i\neq j}^{15} x_i \quad , \qquad c_j = 1 - t$$

fr $j \in N \cap \{1, 2, \ldots, 15\}$, $\quad 0 \leq t \leq 1$, $\quad N$ wie in Teil (A).
Man zeige $r_j(t) = r_j + t$ und folgere, da fr $-r_j < t \leq -r_j + \delta$, $\quad \delta > 0$ gengend klein, die Variable x_j Basis-Variable wird. Man lse das Problem mit

$$\begin{array}{lcccccccccl}
\text{(a)} & j & = & 6 & , & t & = & 0.25 & , & c_6 & = & 0.75 & ; \\
\text{(b)} & j & = & 7 & , & t & = & 0.2 & , & c_7 & = & 0.8 & ; \\
\text{(c)} & j & = & 10 & , & t & = & 0.05 & , & c_{10} & = & 0.95 & .
\end{array}$$