Musterlösung Probeklausur NumLA

! ALLE ERGEBNISSE OHNE GEWÄHR !

Aufgabe 1:

(a) Bestimme die SVD der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Finde U, V, Σ, sodass gilt: $A = U\Sigma V^T$

- Bestimme die Eigenwerte von A^TA: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 9$
- Bestimme die Eigenvektoren von A^TA:

$$v_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad v_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\rightarrow \text{orthogonal})$$

$$\Rightarrow \quad V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Singulärwerte sind die Quadratwurzeln aus den positiven Eigenwerten von A^TA, d.h.

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Bestimme U aus $A = U\Sigma V^T \Leftrightarrow AV = U\Sigma$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 2/\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

(b) <u>Zeige:</u> Die Singulärwerte von A sind gleich den Wurzeln aus den positiven Eigenwerten von A^*A.

<u>Bew.:</u> $A^*A = (U\Sigma V^*)^* U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^*$

$\Rightarrow$ A^*A ist ähnlich zu $\Sigma^*\Sigma$

$\Rightarrow$ A^*A und $\Sigma^*\Sigma$ haben die gleichen Eigenwerte

Die Eigenwerte von $\Sigma^*\Sigma$ sind $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$, also auch die Eigenwerte von A^*A

$\Rightarrow$ Beh.

$\square$

Aufgabe 2:

Zeige: Der Algorithmus ist rückwärtsstabil. ($\boxed{<}\cdot,\cdot\boxed{>}$ bezeichne Maschinenskalarprodukt)

Bew.: n=1: $\boxed{<} x, y \boxed{>} = x \odot y = xy(1+\varepsilon_1) = \underbrace{x(1+\varepsilon_1)}_{=: \tilde{x}} \underbrace{y}_{=: \tilde{y}}$

$= \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$

mit $\frac{|\tilde{x}-x|}{|x|} = \frac{|x(1+\varepsilon_1)-x|}{|x|} = |\varepsilon_1| = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\tilde{y}$ analog

n=2: $\boxed{<} x, y \boxed{>} = x_1 \odot y_1 \oplus \underbrace{\boxed{<} x^{(1)}, y^{(1)} \boxed{>}}_{\text{Fall } n=1}$

$= x_1 y_1 (1+\varepsilon_1) \oplus x_2 y_2 (1+\varepsilon_2)$

$= (x_1 y_1 (1+\varepsilon_1) + x_2 y_2 (1+\varepsilon_2))(1+\varepsilon_3)$

$= x_1 y_1 (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) + x_2 y_2 (1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$

$= \underbrace{x_1 (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)}_{=: \tilde{x}_1} \underbrace{y_1}_{=: \tilde{y}_1} + \underbrace{x_2 (1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}_{= \tilde{x}_2} \underbrace{y_2}_{=: \tilde{y}_2}$

$= \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle$

mit $\frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} x_1(1+\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_3) \\ x_2(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|}$

$= \frac{\left\| \begin{pmatrix} x_1(\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_3) \\ x_2(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3) \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|} = \mathcal{O}(\varepsilon)$

Allgemein: Bei jeder neuen Addition kommt ein Term $(1+\varepsilon_i)$ dazu, Ordnung wird beibehalten.

$\Rightarrow$ rückwärtsstabil

Aufgabe 3:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die LU-Zerlegung von A ohne Pivotisierung.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha}{\alpha^2-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 0 & \alpha - \frac{1}{\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{\alpha^2-1} + \alpha \end{pmatrix}$$

Dies ist möglich für $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -1$

(b) Bestimme die Lösung des LGS $Ax = b$ mit $b = (1, 2, 3)^T$ und $\alpha = 2$.

- Löse zunächst $Ly = b \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 14/3 \end{pmatrix}$
- Löse dann $Ux = y \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 4 \\ 7/2 \end{pmatrix}$

(c) Bestimme die Kondition von A für $\alpha = 2$ bzgl. der Zeilensummennorm:

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 8$$

Aufgabe 4:

(a) Rückwärtseinsetzen: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

- Verfahren: $x_n = b_n / a_{nn}$

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}) / a_{n-1,n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_1 = (b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j) / a_{11}$$

- Pseudocode: for Eintrag $i = n$ bis 1

$$x_i = (b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j) / a_{ii}$$

end

(b) Aufwand:

n Schritte, im i-ten Schritt eine Division, $n-i$ Multiplikationen und Additionen

$\Rightarrow$ Aufwand $\sum_{i=1}^{n} (1 + 2(n-i)) = n + 2 \sum_{i=1}^{n} (n-i) = n^2$

Aufgabe 5:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1/4 & 1/16\\ 1 & 1/2 & 1/4\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 5/2 & 25/4\end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die QR-Zerlegung von A:

$$Q=\begin{pmatrix}-1/2 & -427/659 & 241/467 & -379/1500\\ -1/2 & -141/455 & -1063/1719 & 3762/7219\\ -1/2 & 141/385 & -854/2341 & -1291/1858\\ -1/2 & 423/715 & 341/730 & 721/1691\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}-2 & -19/8 & -169/32\\ 0 & 1269/572 & 1700/337\\ 0 & 0 & 1441/1077\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

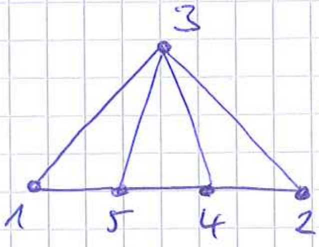
(b) Bestimme die Polynomkoeffizienten a_0, a_1, a_2 mit Hilfe der QR-Zerlegung:

- Löse zunächst $y = Q^* b \quad \Rightarrow \quad y=\begin{pmatrix}-1\\ 282/1001\\ -895/5917\\ 379/400\end{pmatrix}$
- Löse dann $x = R^{-1} y \quad \Rightarrow \quad x=\begin{pmatrix}412/1203\\ 154/401\\ -136/1203\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}$

Aufgabe 6:

(a)

G_A

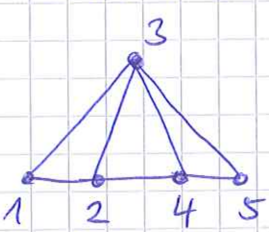


$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} * & & * & & * \\ & * & * & * & \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ * & & * & * & * \end{pmatrix}$$

(b) Cuthill-McKee:

i	$Y(i)$	z_i	$\tilde{z}_i$	Y
1	1	$\{3,5\} \setminus \{1\}$	$(5,3)$	$(1,5,3)$
2	5	$\{1,3,4\} \setminus \{1,5,3\}$	(4)	$(1,5,3,4)$
3	3	$\{1,2,4,5\} \setminus \{1,5,3,4\}$	(2)	$(1,5,3,4,2)$

$\Rightarrow G_{A_{neu}}$



$$\Rightarrow A_{neu} = \begin{pmatrix} * & * & * & & \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Aufgabe 7:}}$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 x_2 + 1 \\ x_1^2 - x_2 + 2 \end{pmatrix}$

(a) Zeige: D abgeschlossen und nicht leer

Bew.: • nicht leer klar ✓

• abgeschlossen, da $\mathbb{R}^2 \setminus D$ offen ✓

Zeige: $g(D) \subseteq D$

Bew.: • Für $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ gilt: $\frac{1}{4}(x_2 - x_1 x_2 + 1) \in [-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subseteq [-1, 1]$

• Ebenso: $\frac{1}{4}(x_1^2 - x_2 + 2) \in [\frac{1}{4}, 1] \subseteq [-1, 1]$

Zeige: $g: D \to D$ Kontraktion

Bew.: $g(x) - g(y) \underset{\text{Mittelwertsatz}}{=} \left(\int_0^1 Dg(x + t(x-y))\, dt\right) \cdot (x-y)$

mit $Dg(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x_2 & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|Dg(x)\|_\infty = \max\{\underbrace{-\frac{1}{4}x_2}_{\in[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}, \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_1}_{\in[0, \frac{1}{2}]}, \underbrace{\frac{1}{2}x_1}_{\in[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}, -\frac{1}{4}\}$

ACHTUNG: Hier: $\| \ \|_\infty \hat{=}$ max. Eintrag einer Matrix → es könnte auch die Zeilensummennorm gemeint sein

↳ dann: $L = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \|Dg(x)\|_\infty \le \underset{L}{\underset{\|}{\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in D$

Damit:

$\|g(x) - g(y)\|_\infty \le \left\|\int_0^1 Dg(x + t(x-y))\, dt\right\|_\infty \|x-y\|_\infty$

$\le \int_0^1 \underbrace{\|Dg(x + t(x-y))\|_\infty}_{\le L} dt \ \|x-y\|_\infty$

$\le L\|x-y\|_\infty$

$\Rightarrow g$ Kontraktion mit $L = \frac{1}{2}$

(b) Es soll gelten: $\|\bar{x} - x_k\|_\infty \leq 0{,}01$

A-priori-Abschätzung: $\|\bar{x} - x_k\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \|x_1 - x_0\|_\infty$

$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 = g(x_0) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|x_1 - x_0\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \|\bar{x} - x_k\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Bestimme k, sodass $\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 0{,}01$

$\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 0{,}01 \Leftrightarrow 2^k \approx 100 \Rightarrow k \approx 7$

Mit $L = \frac{3}{4}$: $k \approx 19$ Iterationsschritte

Aufgabe 8.

$$A = I + \alpha E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0, \quad n < 2 + \frac{1}{\alpha}$$

Jakobi-Verfahren:

$$(x_{k+1})_i = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} A_{ij} (x_k)_j \right) = M^{-1} (N x_k + b)$$

mit $A = L + D + R$, $M = D$, $N = -L - R$

Das Verfahren konvergiert $\Leftrightarrow$ $\rho(B) < 1$ für $B = M^{-1} N$

$$M = D = \begin{pmatrix} 1+\alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1+\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\alpha} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{1+\alpha} \end{pmatrix}$$

ex., da $\alpha > 0$

$$N = -L - R = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \cdots & -\alpha \\ -\alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\alpha \\ -\alpha & \cdots & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = M^{-1} N = -\frac{\alpha}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\rho(B) \leq \|B\|$ für jede induzierte Matrixnorm.

Zeige: $\|B\|_\infty < 1$ in der Zeilensummennorm

$$\|B\|_\infty = \left\| -\frac{\alpha}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = (n-1) \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\overset{n < 2 + \frac{1}{\alpha}}{<} \left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$= 2 \frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}$$

$$= \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}$$

$$= \frac{1+\alpha}{1+\alpha}$$

$$= 1$$

$\Rightarrow \rho(B) \leq \|B\|_\infty < 1$

$\Rightarrow \rho(B) < 1$

$\Rightarrow$ Das Verfahren konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}^n$.