Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 15.01.2015
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. C. Himpe

Übung zur Vorlesung

Numerische Lineare Algebra

Wintersemester 2014/2015 — Klausurvorbereitung

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme)
Gegeben sei eine Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Inverse Matrix zu A mit Hilfe der LR-Zerlegung.

b) Prüfen Sie, ob diese Matrix positiv definit ist mit der Cholesky-Zerlegung.

c) Schätzen Sie die Lösung die Gleichungssystem $Ax = (1\ 1\ 1)^T$ mit jeweils einem Schritt des GSV und ESV sofern die Verfahren anwendbar sind.

Aufgabe 2 (Nichtlineare Gleichungen)
Approximieren Sie den Schnittpunkt der Funktionen $f(x) = \arcsin(x)$ und $g(x) = 2x^2$ für $x \in [0.25, 1]$. Vergleichen Sie den Schätzwert nach jeweils zwei Schritten des Newton- und des Sekanten Verfahrens. Berechnen Sie einen Startwert mit einem Schritt des Intervallschachtelungsverfahren.

Aufgabe 3 (Givens Rotation)
Eine Matrix von der Form:

$$G(k,l,\alpha)_{ij} = \begin{cases} \cos(\alpha) & i = k, j = k \vee i = l, j = l \\ \sin(\alpha) & i = l, j = k \\ -\sin(\alpha) & i = k, j = l \\ 1 & i = j \\ 0 & sonst \end{cases}$$

heißt Givens Rotation. Zeigen Sie, dass $G(k,l,\alpha) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ orthogonal ist, und dass bei der Multiplikation mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ von links, $G(k,l,\alpha)A$, sich nur die Zeilen k und l ändern.

Aufgabe 4 (Eigenwertprobleme & Matrixnormen)
Zu der Matrix A aus Aufgabe 1, schätzen Sie die Lage der Eigenwerte mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin. Wie lässt sich die Schätzung des größten und kleinsten Eigenwerts mit Hilfe von Matrixnormen verbessern? Berechnen Sie den betragsmäßig kleinsten und größten Eigenwert mit zwei Schritten des von-Mises und dem Wielandt Verfahren.