Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 18.12.2014
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. C. Himpe

Übung zur Vorlesung

Numerische Lineare Algebra

Wintersemester 2014/2015 — Blatt 10

Abgabe: 08.01.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Gerschgorin-Kreise & Newton für Eigenwerte) (4 Punkte)

a) Schätzen Sie die Lage der Eigenwerte mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin für die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.25 \\ 0.3 & -2 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.05 & 1 & 0.2 & 7 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 1 & 0.1 & 12 \end{pmatrix}.$$

b) Das Eigenwertproblem $Av = \lambda v$ kann man auch als Nullstellensuche auffassen. Formulieren Sie ein zugehöriges Newtonverfahren (mit $\|v\|_2 = 1$).

Aufgabe 2 (Eigenwerte einer transponierten Matrix) (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und A^T identisch sind. Stimmt diese Aussage auch für die Eigenvektoren? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Gerschgorin-Kreise) (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ eine Diagonalmatrix. Zeigen Sie, dass durch die Ähnlichkeitstransformation $A \mapsto D^{-1}AD$ die Gerschgorin-Kreise die Form

$$K_i = \left\{ x \in \mathbb{C} : \ |x - a_{ii}| \leq \sum_{k \neq i} \left| \frac{a_{ik} d_k}{d_i} \right| \right\}$$

haben. Finden Sie zu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 3 \end{pmatrix}$$

einen Kreis, in dem genau ein Eigenwert von A liegt.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Rayleighsche Quotienten Iteration) (4 Punkte)
Schreiben Sie ein Programm zur Bestimmung von Eigenwerten mit Hilfe des Rayleighschen Maximumprinzips:

$$R_i = \frac{< Ax_i, x_i >}{< x_i, x_i >}$$
$$x_{i+1} = \frac{(A - R_i I)^{-1} x_i}{\|(A - R_i I)^{-1} x_i\|}.$$

Testen Sie Ihr Programm am symmetrischen Teil der Matrix A aus Aufgabe 1a)

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(A + A^T).$$

Benutzen Sie Standard Einheitsvektoren als Startvektoren, und iterieren Sie bis die Änderungen in zwei aufeinanderfolgenden R_i kleiner als 10^{-4} ist.

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe: Übersicht Lineare Löser) (4 Punkte)
In der Vorlesung wurden einige numerische Methoden zum Lösen linearer Gleichungssysteme,

$$Ax = b,$$

vorgestellt. Erstellen Sie eine Übersichtstabelle mit folgende Zeilen:

(a) LR-Zerlegung

(b) Cholesky-Zerlegung

(c) QR-Zerlegung

(d) Jacobi-Verfahren

(e) Gauss-Seidel-Verfahren

(f) SOR-Verfahren

(g) Gradienten-Methode

(h) Conjugate Gradients

(i) Pseudoinverse via SVD

und den Spalten:

(a) Vorraussetzungen (an A)

(b) Anzahl flops (pro Iteration für iterative Verfahren)

(c) Direktes oder Iteratives Verfahren

und füllen Sie diese Tabelle mit den entsprechenden Einträgen.