
Übung zur Vorlesung
Numerische Lineare Algebra
Wintersemester 2014/2015 — Blatt 7

Abgabe: 04.12.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (GSV und ESV)

(4 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- a) Was ist die Lösung des linearen Gleichungssystems?
- b) Berechnen Sie die Iterationsmatrizen G und E des Gesamtschrittverfahrens und des Einzelschrittverfahrens gemäß $G := -A_D^{-1}(A_L + A_R)$, $E := -(A_D + A_L)^{-1}A_R$.
- c) Berechnen Sie $\|G\|_\infty$ und $\|E\|_\infty$.
- d) Es sei der Startvektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ gegeben. Berechnen Sie die Iterierten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ und $x^{(3)}$ für die beiden Verfahren.

Aufgabe 2 (Zerlegbarkeit von Matrizen)

(4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann zerlegbar ist, wenn eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$P^T A P = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $\tilde{A}_{22} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$, $\tilde{A}_{21} \in \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ mit $1 \leq k \leq n-1$.

Aufgabe 3 (Konvergenz vom GSV und ESV)

(4 Punkte)

Bei der Diskretisierung der Randwertaufgabe $u''(x) = f(x)$, $x \in (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$ erhält man ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren und das Einzelschrittverfahren in diesem Fall konvergieren.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: GSV und ESV)

(4 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem $-u''(x) = f(x)$, $x \in (0, 1)$, $u(0) = u(1) = 0$. Durch $x_i := hi$, $h := \frac{1}{n+1}$, $i = 0, \dots, n+1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $(0, 1)$ gegeben. Eine Diskretisierung des Randwertproblems führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $u_0 = u_{n+1} = 0$ gegeben sind und u_i , $i = 1, \dots, n$ die gesuchten Näherungswerte für $u(x_i)$ sind.

Implementieren Sie das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren zur Lösung dieser Randwertaufgabe, wobei die rechte Seite $f(x)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \pi^2 \sin(\pi x),$$

d.h. die exakte Lösung u des Randwertproblems ist gegeben durch $u(x) = \sin(\pi x)$.

Ihr Programm sollte terminieren, wenn maximale Fehler $\max_i |u_i - u(x_i)|$ kleiner ist als die vorgegebene Schranke $TOL = 10^{-3}$. Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor und berechnen Sie die Näherungslösung $u_h = (u_1, \dots, u_n)$ und den maximalen Fehler $\max_i |u_i - u(x_i)|$.

Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

- (i) Einlesen der Anzahl der Teilintervalle n und Abfrage, ob das Gesamtschrittverfahren oder das Einzelschrittverfahren verwendet werden soll.
- (ii) Berechnung des Ergebnisses.
- (iii) Ausgabe der berechneten Näherungslösung, des maximalen Fehlers und der Anzahl der Iterationsschritte.

Testen Sie Ihr Programm mit folgenden Eingaben:

| | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| n | 20 | 20 | 40 | 40 |
| GSV / ESV | GSV | ESV | GSV | ESV |