Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 20.11.2014
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. C. Himpe

Übung zur Vorlesung

Numerische Lineare Algebra

Wintersemester 2014/2015 — Blatt 6

Abgabe: 27.11.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Berechnung der Pseudo-Inversen) (4 Punkte)
Berechnen Sie die Pseudo-Inverse der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

und berechnen Sie die Lösung zu dem Ausgleichsproblem $\hat{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_2$ mit $b = (1, 2, 3, 4)^T$.

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit der Pseudo-Inversen) (4 Punkte)
Es sei eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ einer Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Rang p mit diagonalem $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_p > 0$ und orthogonalen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass durch die *Moore-Penrose Bedingungen*

$$AB = (AB)^T, \qquad BA = (BA)^T, \qquad BAB = B, \qquad ABA = A$$

eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eindeutig definiert ist.

b) Wir definieren die Diagonalmatrix $\Sigma^+ := \operatorname{diag}(1/\sigma_1, \ldots, 1/\sigma_p, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zeigen Sie, dass die Matrix $B := V\Sigma^+ U^T$ die Moore-Penrose-Bedingungen erfüllt. Hiermit ist insbesondere die Pseudoinverse $A^+ := V\Sigma^+ U^T$ unabhängig von der Wahl der Singulärwertzerlegung eindeutig definiert.

Aufgabe 3 (Matrixapproximation durch SVD) (4 Punkte)
Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei eine Singulärwertzerlegung wie in Aufgabe 2 gegeben. Zu einem r mit $1 \leq r < p$ wird eine Approximation $A_r := U\Sigma_r V^T$ mit $\Sigma_r := \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert. Zeigen Sie für $r = 1$, dass bzgl. der Frobenius-Norm $\|A\|_F := (\sum_{i,j=1}^{m,n} (a_{ij}^2))^{1/2}$ gilt:

$$\inf_{B \in \mathbb{R}^{m \times n}, \operatorname{rang}(B) = r} \|A - B\|_F = \|A - A_r\|_F \,.$$

Hinweis: Überlegen Sie, dass man eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Rang 1 darstellen kann als $B = \sigma_1' \cdot u \cdot v^T$ mit $\sigma_1' > 0$, $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $||u|| = ||v|| = 1$ und dass die Frobenius-Norm invariant bzgl. orthogonaler Abbildungen ist.
Bemerkung: Die Aussage gilt allgemeiner für alle $1 \leq r < p$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: QR-Zerlegung) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie eine Routine, welche zu einer übergebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine rechte Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ liefert, so dass gilt $A = QR$.

b) Testen Sie diese Routine, indem Sie mit Hilfe der resultierenden QR-Zerlegung die Ausgleichsprobleme aus Aufgabe 1 lösen sowie Aufgabe 3 auf Blatt 5.