Institut für Numerische und Angewandte Mathematik 13.11.2014
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. C. Himpe

Übung zur Vorlesung

Numerische Lineare Algebra

Wintersemester 2014/2015 — Blatt 5

Abgabe: 20.11.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (LR-Zerlegung für Tridiagonalmatrizen) (4 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & \vdots \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Alle Teilmatrizen $A_k = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le k}}$ von A seien ebenfalls regulär. Geben Sie die LR-Zerlegung der Matrix in Abhängigkeit der Parameter $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ an sowie einen Algorithmus zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe 2 (Positiv definite Tridiagonalmatrizen) (4 Punkte)
Gegeben sei folgende Matrix für $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 \\ 0 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Matrix positiv definit ist.

b) Geben Sie für die Fälle aus a) die Cholesky-Zerlegung der Matrix an.

Aufgabe 3 (Lineare Ausgleichsrechnung) (4 Punkte)
Durch die Messpunkte

t_i	$\frac{1}{e}$	1	e
y_i	-1	e	$2+e^2$

soll eine Ausgleichsfunktion $u(t) = \alpha t + \beta \ln(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, gelegt werden. Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem und berechnen Sie die optimalen Parameter α, β.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Cholesky-Zerlegung) (4 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Programm, dass zu einer gegebenen Matrix, falls möglich, die Cholesky-Zerlegung bestimmt. Testen Sie ihr Programm mit der Lehmer-Matrix der Dimension $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$:

$$A_{i,j} = \begin{cases} \frac{i}{j} & j \geq i \\ \frac{j}{i} & j < i \end{cases}.$$

b) Benutzen Sie die Cholesky-Zerlegung zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit der Matrix A aus Aufgabenteil a) und $b = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{10}$.