Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
FB Mathematik und Informatik der Universität Münster
Prof. Dr. M. Ohlberger, Dipl.-Math. C. Himpe 30.10.2014

Übung zur Vorlesung

Numerische Lineare Algebra

Wintersemester 2014/2015 — Blatt 3

Abgabe: 6.11.2010, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (Rundungsfehler) (4 Punkte)

a) (x, y) sei die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & a \\ x & + & 1.01\ y & = & b. \end{array}$$

Berechnen Sie die absoluten und relativen Fehler von x und y, wenn $a = 1000$ und $b = 1005$ bis auf einen relativen Eingabefehler ϵ gegeben sind, also $\tilde{a} = a(1 + \epsilon_1)$ und $\tilde{b} = b(1 + \epsilon_2)$ mit $|\epsilon_1|,\ |\epsilon_2| \leq \epsilon$.

b) Zeigen Sie: sei $x_0 = (x_1, \ldots, x_m)$ und $x_0 + \Delta x \in U$ eine Störung der Eingabedaten mit $\|\Delta x\| \ll 1$. Falls $f : U \to \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar, so ist der Ergebnisfehler $\Delta f(x_0) = f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)$ in erster Näherung gleich:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\delta f}{\delta x_j}(x_0)\Delta x_j = \nabla f(x_0)\Delta x.$$

Aufgabe 2 (Konditionszahlen) (4 Punkte)

Es bezeichne $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ die Menge der Eigenwerte der reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass für die Kondition bzgl. der Spektralnorm

a) von symmetrischen regulären Matrizen gilt

$$\mathrm{cond}(A) := \frac{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|},$$

b) von orthogonalen Matrizen gilt

$$\mathrm{cond}(A) = 1.$$

Aufgabe 3 (Diskretisierungsfehler) (4 Punkte)
Die mithilfe der Finite-Differenzen-Methode diskretisierte (eindimensionale) Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\frac{c}{h^2} A u_h = f_h \tag{1}$$

wobei die Matrix A die Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

hat. Schätzen Sie die Kondition der Matrix $\frac{c}{h^2}A$ ab und folgern Sie daraus das Verhalten des Rundungsfehlers für kleine h.
Hinweis: die Eigenwerte von A sind gegeben durch: $\lambda_i = 2 - 2\cos(\frac{i\pi}{N+1})$.

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Apfelmännchen) (4 Punkte)
Für eine komplexe Zahl c sei folgende rekursive Folge definiert: $z_0 := 0$, $z_{n+1} := z_n^2 + c$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren zu gegebener Konstante $N \in \mathbb{N}$ folgende Funktion:

$$f_N(c) := \begin{cases} 0, & \text{falls } |z_n| \leq 2 \text{ für alle } n = 0, \ldots, N \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass das Problem der Berechnung von $f_N(c)$ für $c = -2$ für kein $N > 1$ wohlgestellt ist. Zeigen Sie, dass für $|c| > 2$ die Berechnung von $f_N(c)$ in geeigneter Umgebung $B_\delta(c)$ wohlgestellt ist.

b) Implementieren Sie die Funktion $f_N(c)$. Werten Sie Ihre Funktion

   für $N = 200$ auf einem äquidistanten kartesischen Gitter im Bereich $[-2.25, 1] \times i[-1.5, 1.5] \subset \mathbb{C}$ aus. Hierbei seien die komplexen Zahlen mit dem $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Visualisieren Sie die resultierenden Werte z.B. als Textausgabe oder 2D-Darstellung.

Bemerkung: Die Punkte $c \in \mathbb{C}$ mit $f_N(c) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ bilden die *Mandelbrot-Menge*.