
Übung zur Vorlesung
Numerische Lineare Algebra
Wintersemester 2014/2015 — Blatt 1

Abgabe: 23.10.2014, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (1– und ∞ -norm induzierte Operatornormen) (4 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine $n \times n$ -Matrix.

- Finden Sie eine optimale Konstante C_1 , so dass gilt $\|Ax\|_1 \leq C_1\|x\|_1$.
- Finden Sie eine optimale Konstante C_∞ , so dass gilt $\|Ax\|_\infty \leq C_\infty\|x\|_\infty$.
- Zeigen Sie, dass es für alle Normen auf \mathbb{R}^n eine Konstante C gibt, so dass gilt $\|Ax\| \leq C\|x\|$.

Hinweis: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.

Aufgabe 2 (Stetigkeit von linearen Operatoren) (4 Punkte)
Seien V, W normierte Vektorräume und $A : V \rightarrow W$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- A ist stetig,
- A ist beschränkt,
- A ist stetig in 0.

Hinweis: A heißt beschränkt, falls es eine Konstante C gibt, mit $\|Ax\|_W \leq C\|x\|_V$ für alle $x \in V$. A heißt stetig im Punkt $x \in V$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit: Für alle $y \in V$ mit $\|x - y\|_V \leq \delta$ gilt $\|Ax - Ay\|_W \leq \varepsilon$.

Aufgabe 3 (Beschränktheit linearer Operatoren) (4 Punkte)
Gibt es einen linearen Operator $A : V \rightarrow W$ mit normierten Räumen V, W , der nicht beschränkt ist? (Beweis oder Beispiel angeben!)

Aufgabe 4 (Programmieraufgabe: Maschinen-Arithmetik) (4 Punkte)

Implementieren Sie die folgenden Funktionen für $x, y, z \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{N}$ derart, dass die Reihenfolge der Teiloperationen der Klammerung entspricht und Fliesskommazahlen doppelter Genauigkeit verwendet werden:

$$\begin{aligned}f_1(x, y, z) &= x(y + z) & g_1(x, y, z) &= x + (y + z) & h(n, m) &= (1/n)^m n^m - 1 \\f_2(x, y, z) &= xy + xz & g_2(x, y, z) &= (x + y) + z\end{aligned}$$

- a) Ermitteln Sie die Differenz zwischen f_1 und f_2 für $x = e^{10}, y = \sin(1.57), z = \ln 2.71$, und erläutern Sie dies.
- b) Ermitteln Sie die Differenz zwischen g_1 und g_2 für $x = 10^{-10}, y = 10^{10}, z = -y$ und erläutern Sie dies.
- c) Bestimmen Sie die Werte von $h(n, m)$ für $m = 10, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 8$ in einer Schleife und erläutern Sie die Ergebnisse.