

---

Übung zur Vorlesung

**Numerische Lineare Algebra**

Wintersemester 2014/2015 — Anwesenheitsübung

---

**Aufgabe 1 (Ableitungsdiskretisierung)**

Die folgenden Ableitungen der hinreichend oft differenzierbaren Funktion  $u$  seien im Punkt  $x$  durch die angegebenen Differenzenquotienten approximiert. Bestimmen Sie die Ordnung des Diskretisierungsfehlers in Abhängigkeit von der Schrittweite  $h$ .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } u'(x) \approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, & \text{b) } u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ \text{c) } u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}, & \text{d) } u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \end{array}$$

**Aufgabe 2 (Diskretisierung)**

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) &= 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

für eine Funktion  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Setzt man  $u_i = u(i\Delta x)$  für  $\Delta x := \frac{1}{N+1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , so erhält man mit Aufgabe 1 d) approximativ ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der  $u_i$  für  $i = 1, \dots, N$ . Geben Sie explizit das resultierende Gleichungssystem an und lösen Sie es für  $N = 3$ .

**Aufgabe 3 (Gauß-Elimination)**

Berechnen Sie durch Gaußelimination die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Was erhalten Sie, wenn Sie nach jeder Rechenoperation auf drei Stellen runden?  
Vergleichen Sie das Ergebnis, mit dem Ergebnis des Gauß Algorithmus angewendet auf

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$