Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 9, Abgabe: Freitag, 20.12.2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > \frac{1}{2}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ |x|^\alpha, & x < 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie: Die Newton-Iteration konvergiert für $x_0 > 0$. Bestimmen Sie die Konvergenzordnung.

(b) Sei $a > 0$ und $f(x) = a - \frac{1}{x}$. Zeigen Sie: Für $0 < x_0 < \frac{2}{a}$ konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch.

(c) Sei $f(x) = ax + b$. Zeigen Sie: das Newton-Verfahren konvergiert in einer einzigen Iteration.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Zur Berechnung von $\sqrt{a}$ benutzen wir das seit der Antike bekannte Heron-Verfahren

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2x_k}.$$

Untersuchen Sie die lokale Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Beim Sekantenverfahren ersetzen wir im Vergleich zum Newton-Verfahren die Ableitung durch eine Differenzenapproximation $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$, d.h.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

In dieser Form ist das Sekantenverfahren aber keine Fixpunktiteration, da auf zwei vorangegangene Iterationen zurückgegriffen wird. Formulieren Sie das Sekanten-Verfahren als zweidimensionale Fixpunktiteration, indem Sie zusätzlich

$$y_{k+1} = x_k$$

setzen. Untersuchen Sie das Verfahren auf lokale Konvergenz und Konvergenzordnung.