Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 8, Abgabe: Freitag, 13.12.2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass für die Pseudoinverse A^+ gilt:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(A^+)^+ = A$.

(b) Seien $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$. Berechnen Sie die Pseudoinverse der folgenden Ausdrücke:

1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A invertierbar.
2. $A = uv^t$.
3. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $A_{ik} = 1 \,\forall i, k$.
4. $A = u$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion mit Minimum $\bar{x}$. In einer Umgebung des Minimums sei g zwei mal stetig differenzierbar.
Zeigen Sie, für jede abgeschlossene Kugel um $\bar{x}$ mit Radius R existiert ein $\tau = \tau(R)$, sodass $\Phi(x) = x - \tau\nabla g(x)$ kontraktiv auf der Kugel ist.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 20.12.2013, 12.00 Uhr)
Programmieren Sie das n–dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle $\overline{x}$ einer C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

(a) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslöung des folgenden chemischen Systems gesucht:

$$\begin{array}{rcccccc} CH_4 & + & \frac{1}{2}O_2 & \rightleftharpoons & CO & + & 2H_2 \\ CH_4 & + & H_2O & \rightleftharpoons & CO & + & 3H_2 \\ H_2 & + & CO_2 & \rightleftharpoons & CO & + & H_2O\,. \end{array}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem $f(x_1,\dots,x_7)=0$ für die Konzentration $x \in \mathbb{R}^7$ mit

$$f(x_1,\dots,x_7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{x_6}{x_7} \\ x_3 + x_4 + 2x_5 - \frac{2}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{x_7} \\ -28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 \\ \qquad + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 \\ 400x_1x_4^3 - 1.7837 \cdot 10^5 x_3x_5 \\ x_1x_3 - 2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten: $x_1 = x_4 = x_6 = 0.5$, $x_2 = x_3 = x_5 = 0$, $x_7 = 2.0$.

(b) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x,y) = 100(y-x^2)^2 + (1-x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt $(\bar{x},\bar{y}) = (1,1)$. Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung $f(x,y) := \nabla h(x,y) = 0$ im Punkt $(x_0,y_0) = (-0.5, 0.5)$. Prüfen Sie die Hesse-Matrix von $h(x,y)$ auf Positiv-Definitheit.

Hinweise: Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium $\| f(x) \|_2 \leq 10^{-10}$. Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren oder eine geeignete Matlab Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k = -f(x^k)\,, \qquad x^{k+1} = x^k + d^k\,.$$