

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 8, Abgabe: Freitag, 13.12.2013, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass für die Pseudoinverse A^+ gilt:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(A^+)^+ = A$.

(b) Seien $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$. Berechnen Sie die Pseudoinverse der folgenden Ausdrücke:

1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A invertierbar.
2. $A = uv^t$.
3. $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $A_{ik} = 1 \forall i, k$.
4. $A = u$.

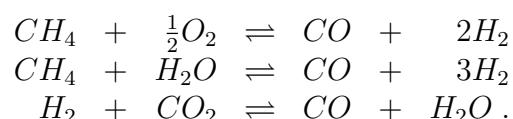
Aufgabe 2: (4 Punkte)

Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion mit Minimum \bar{x} . In einer Umgebung des Minimums sei g zwei mal stetig differenzierbar.Zeigen Sie, für jede abgeschlossene Kugel um \bar{x} mit Radius R existiert ein $\tau = \tau(R)$, sodass $\Phi(x) = x - \tau \nabla g(x)$ kontraktiv auf der Kugel ist.**Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 20.12.2013, 12.00 Uhr)**Programmieren Sie das n -dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle \bar{x} einer C^2 -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

- (a) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslösung des folgenden chemischen Systems gesucht:



Dies führt auf das Gleichungssystem $f(x_1, \dots, x_7) = 0$ für die Konzentration $x \in \mathbb{R}^7$ mit

$$f(x_1, \dots, x_7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{x_6}{x_7} \\ x_3 + x_4 + 2x_5 - \frac{2}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{x_7} \\ -28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 \\ \quad + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 \\ 400x_1x_4^3 - 1.7837 \cdot 10^5 x_3x_5 \\ x_1x_3 - 2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten: $x_1 = x_4 = x_6 = 0.5$, $x_2 = x_3 = x_5 = 0$, $x_7 = 2.0$.

- (b) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung $f(x, y) := \nabla h(x, y) = 0$ im Punkt $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.5)$. Prüfen Sie die Hesse-Matrix von $h(x, y)$ auf Positiv-Definitheit.

Hinweise: Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium $\|f(x)\|_2 \leq 10^{-10}$. Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren oder eine geeignete Matlab Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + d^k.$$