

## Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 8, Abgabe: Freitag, 13.12.2013, 12.00 Uhr

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)(a) Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Zeigen Sie, dass für die Pseudoinverse  $A^+$  gilt:

1.  $AA^+A = A$ .
2.  $A^+AA^+ = A^+$ .
3.  $(A^+)^+ = A$ .

(b) Seien  $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$ . Berechnen Sie die Pseudoinverse der folgenden Ausdrücke:

1.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A$  invertierbar.
2.  $A = uv^t$ .
3.  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit  $A_{ik} = 1 \forall i, k$ .
4.  $A = u$ .

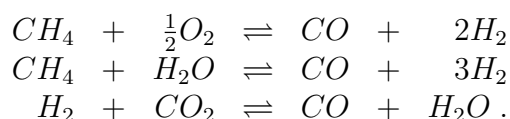
**Aufgabe 2:** (4 Punkte)

Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)Sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine strikt konvexe Funktion mit Minimum  $\bar{x}$ . In einer Umgebung des Minimums sei  $g$  zwei mal stetig differenzierbar.Zeigen Sie, für jede abgeschlossene Kugel um  $\bar{x}$  mit Radius  $R$  existiert ein  $\tau = \tau(R)$ , sodass  $\Phi(x) = x - \tau \nabla g(x)$  kontraktiv auf der Kugel ist.**Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 20.12.2013, 12.00 Uhr)**Programmieren Sie das  $n$ -dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle  $\bar{x}$  einer  $C^2$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

- (a) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslösung des folgenden chemischen Systems gesucht:



Dies führt auf das Gleichungssystem  $f(x_1, \dots, x_7) = 0$  für die Konzentration  $x \in \mathbb{R}^7$  mit

$$f(x_1, \dots, x_7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{x_6}{x_7} \\ x_3 + x_4 + 2x_5 - \frac{2}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{x_7} \\ -28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 \\ \quad + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 \\ 400x_1x_4^3 - 1.7837 \cdot 10^5 x_3x_5 \\ x_1x_3 - 2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten:  $x_1 = x_4 = x_6 = 0.5$ ,  $x_2 = x_3 = x_5 = 0$ ,  $x_7 = 2.0$ .

(b) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ . Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung  $f(x, y) := \nabla h(x, y) = 0$  im Punkt  $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.5)$ . Prüfen Sie die Hesse-Matrix von  $h(x, y)$  auf Positiv-Definitheit.

Hinweise: Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium  $\|f(x)\|_2 \leq 10^{-10}$ . Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren oder eine geeignete Matlab Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + d^k.$$