Prof. Dr. M. Burger WS 13/14

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 4, Abgabe: Freitag, 15.11.2013, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Mi.	12 - 14 Uhr	SR1B	BK	116	(Patricia Friele)
Gruppe 2:	Do.	08 - 10 Uhr	SR1B	BK	101	(Malte Hebing)
Gruppe 3:	Do.	10 - 12 Uhr	SR1B	BK	120	(Julia Kroos)
Gruppe 4:	Do.	14 - 16 Uhr	SR1B	BK	116	(Patricia Friele)
Gruppe 5:	Do.	16 - 18 Uhr	SR1B	BK	119	(Theresa Stocks)
Gruppe 6:	Fr.	08 - 10 Uhr	SR1B	BK	115	(Bernd Mekes)
Gruppe 7:	Fr.	10 - 12 Uhr	SR1B	BK	114	(Tobias Trame)
Gruppe 8:	Fr.	12 - 14 Uhr	SR1D	BK	117	(Niko Burschik)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Neumann-Reihe: Sei X ein Banachraum und $T : X \to X$ stetig und linear mit $\|T\| < 1$. Sei S definiert durch

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Zeigen Sie

a) S(x) ist für alle $x \in X$ wohldefiniert.

b) S ist linear und stetig und $\|S\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}$. .

c) $I - T$ ist bijektiv und $S = (I - T)^{-1}$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
1- und ∞-norm induzierte Matrixnormen: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $n \times n$–Matrix.

a) Finden Sie eine optimale Konstante C_1, so dass gilt $\|Ax\|_1 \leq C_1\|x\|_1$.

b) Finden Sie eine optimale Konstante C_∞, so dass gilt $|\|Ax\|_\infty \leq C_\infty\|x\|_\infty$.

c) Zeigen Sie, dass es für alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ eine Konstante C gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Ax\| \leq C\|x\|$. Was ist die kleinste solche Konstante

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Landau-Symbole: Man schreibe die folgenden Ausdrücke in der Form $f(h) = \mathcal{O}(h^m)$ für $h \in \mathbb{R}_+$, $h \to 0$, mit einem möglichst großen $m \in \mathbb{N}$:

a) $f(h) = 4(h^2 + h)^2 - 4h^4$,

b) $f(h) = \sin(h)$,

c) $f(h) = \frac{h}{\ln(h)}$,

d) $f(h) = \frac{\sin(1+h) - 2\sin(1) + \sin(1-h)}{h^2}$.