Prof. Dr. M. Burger WS 13/14

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 3, Abgabe: Freitag, 7.11.2013, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Mi.	12 - 14 Uhr	SR1B	BK	116	(Patricia Friele)
Gruppe 2:	Do.	08 - 10 Uhr	SR1B	BK	101	(Malte Hebing)
Gruppe 3:	Do.	10 - 12 Uhr	SR1B	BK	120	(Julia Kroos)
Gruppe 4:	Do.	14 - 16 Uhr	SR1B	BK	116	(Patricia Friele)
Gruppe 5:	Do.	16 - 18 Uhr	SR1B	BK	119	(Theresa Stocks)
Gruppe 6:	Fr.	08 - 10 Uhr	SR1B	BK	115	(Bernd Mekes)
Gruppe 7:	Fr.	10 - 12 Uhr	SR1B	BK	114	(Tobias Trame)
Gruppe 8:	Fr.	12 - 14 Uhr	SR1D	BK	117	(Niko Burschik)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Die p-Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind für $1 \leq p < \infty$ definiert durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

und für $p = \infty$ durch

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Zeigen Sie für die zugeordneten Matrixnormen

$$\|A\|_p := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die folgenden Aussagen:

a) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Die Kondition einer regulären A Matrix bezüglich einer gegebenen Matrixnorm ist gegeben durch

$$\kappa(A) := \|A\| \, \|A^{-1}\|.$$

Sei $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ die Menge der Eigenwerte der reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass für die Kondition bzgl. der Spektralnorm (Aufgabe 1c) gilt:

a) Für A symmetrisch ist

$$\kappa_2(A) = \frac{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|} \tag{1}$$

b) Für A orthogonal ist

$$\kappa_2(A) = 1 \tag{2}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Kondition κ_2 der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
(Abgabe: bis Freitag, 7.11.13 per email an Übungsleiter)
Implementieren Sie die folgenden Funktionen für $x, y, z \in \mathbb{R}$ derart, dass die Reihenfolge der Teiloperationen der Klammerung entspricht und Fliesskommazahlen doppelter Genauigkeit verwendet werden:

$$f_1(x, y, z) = x(y - z), \qquad f_2(x, y, z) = xy - xz \tag{3}$$

bzw.

$$g_1(x, y, z) = x + (y + z), \qquad g_2(x, y, z) = (x + y) + z. \tag{4}$$

a) Ermitteln Sie die Differenz zwischen f_1 und f_2 für $x = e^{10}$, $y = \sin(1.57)$, $z = \ln 2.71$, und erläutern Sie dies.

b) Ermitteln Sie die Differenz zwischen g_1 und g_2 für $x = 10^{-10}$, $y = 10^{10}$, $z = -y$ und erläutern Sie dies.