Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 2, Abgabe: Donnerstag, 31.10.2013, 12.00 Uhr

Übungstermine:

Gruppe 1:	Mi.	12 - 14 Uhr	SR1B	BK	116	(Patricia Friele)
Gruppe 2:	Do.	08 - 10 Uhr	SR1B	BK	83	(Malte Hebing)
Gruppe 3:	Do.	10 - 12 Uhr	SR1B	BK	120	(Julia Kroos)
Gruppe 4:	Do.	14 - 16 Uhr	SR1B	BK	116	(Patricia Friele)
Gruppe 5:	Do.	16 - 18 Uhr	SR1B	BK	119	(Theresa Stocks)
Gruppe 6:	Fr.	08 - 10 Uhr	SR1B	BK	115	(Bernd Mekes)
Gruppe 7:	Fr.	10 - 12 Uhr	SR1B	BK	114	(Tobias Trame)
Gruppe 8:	Fr.	12 - 14 Uhr	SR1D	BK	117	(Niko Burschik)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist strikt diagonaldominant, falls

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \text{für } i = 1, ..., n.$$

Zeigen Sie, dass eine strikt diagonaldominante Matrix A eine eindeutige LR-Zerlegung besitzt.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei für $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 \\ 0 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

.

(a) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die A positiv definit ist.

(b) Geben Sie für $a = 1$ die Cholesky-Zerlegung von A an.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass sich die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit LR-Zerlegung in $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ Rechenoperationen berechnen lässt.

Aufgabe 4: (6 Punkte)
(Abgabe: bis Freitag, 7.11.11 per email an Übungsleiter)
Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Es soll sowohl die Berechnung mit als auch ohne Spaltenpivotsuche möglich sein.
Die Matrix A und der Vektor b sollen übergeben werden. Nach dem Ablauf des Programms soll in der Matrix A die LR-Zerlegung gespeichert sein, in dem Vektor b die Lösung x. Die Permutationsmatrix soll dabei in einem Vektor ausgegeben werden.

(a) Testen Sie das Programm an drei linearen Gleichungssystemen ihrer Wahl von den ersten beiden Übungsblättern oder der Präsenzübung.

(b) Berechnen Sie mit und ohne Spaltenpivotsuche die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 10^{-l} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad l = 6, \dots, 20\,.$$

(c) Vergleichen Sie die Rechenzeit Ihres Algorithmus mit der Rechenzeit der Matlab-Routine $A\backslash b$. Zur Zeitmessung benutzen Sie die Matlab-Funktionen `tic` und `toc`. Machen Sie sich mit dem Matlab-Befehl `rand` vertraut, um eine Zufallsmatrix A und einen Zufallsvektor b zu erzeugen. Wählen Sie $n = 5, 10, 50, 100, 1000$.
Die Matlab-Routine $A\backslash b$ arbeitet parallelisiert, d.h. auf mehreren Rechenkernen gleichzeitig. Um einen genauen Vergleich machen zu können sorgen Sie am besten mit dem Befehl » `maxNumCompThreads(1)` dafür, dass nur auf einem Kern gerechnet wird.