

Aufgabe 0: (4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung (ohne Spaltenpivotsuche) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Zwischenschritte an. Ist diese Zerlegung eindeutig?

- (b) Berechnen Sie danach mit konkreter Anwendung der LR-Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b = (2, 3, -1.5)^T$.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung (mit Spaltenpivotsuche) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4.5 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Zwischenschritte an. Warum benötigt man hier eine Spaltenpivotsuche? Wie sieht die Permutationsmatrix aus?

- (b) Berechnen Sie danach mit Hilfe der obigen Zerlegung die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $b = (4, -2, 3)^T$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **Bandmatrix** der Breite b genau dann, wenn nur b Nebendiagonalen besetzt sind, d.h.

$$a_{i,j} = 0 \text{ für } |i - j| > b$$

- (a) Zeigen Sie, dass sich die LR-Zerlegung von Bandmatrizen der Breite b in $nb^2 + O(np)$ Rechenoperationen berechnen lässt (wir führen die Divisionen nicht extra auf).

- (b) Geben Sie die LR-Zerlegung für folgende Bandmatrix an:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$