Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Klausurvorbereitung

Aufgabe 1

Bei einer physikalischen Messung sind folgende Werte ermittelt worden:

t	0	1	2	3
y	1	3	4	4

Es wird eine Gesetzmäßigkeit der Form

$$y(t) = \alpha + \beta t$$

vermutet.

(a) Geben Sie die Matrix A des zugehörigen Ausgleichsproblems an und stellen Sie die Normalengleichungen auf.

(b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem und geben Sie die Lösungsfunktion an.

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $m+1$-mal stetig differenzierbar und sei $\overline{x}$ eine Nullstelle von f sodass $\frac{d^i f}{x^i}(\overline{x}) = 0$ für $i = 0, \ldots, m-1$ und $\frac{d^m f}{x^m}(\overline{x}) \neq 0$. Es existiere eine Umgebung I von $\overline{x}$, sodass $\frac{d^i f}{x^i}(x) \neq 0$ für $x \neq \overline{x}$. Sei x_k eine aus dem Newton-Verfahren erzeugte Folge, die gegen $\overline{x}$ konvergiert.

(a) Berechnen Sie den Grenzwert

$$q = \lim_k \frac{|x_{k+1} - \overline{x}|}{|x_k - \overline{x}|}.$$

(b) Finden Sie eine geeignete Wahl von c, sodass das modifizierte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - c\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

lokal quadratisch konvergiert.

Aufgabe 3

Gesucht sind die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = (2, 3, -1)^t$ drei Schritte der Vektoriteration \ Potenzmethode durch. Geben Sie mit Hilfe der durchgeführten Iterationen eine Approximation des größten Eigenwerts und des zugehörigen Eigenvektors an. Nutzen Sie den Referenzvektor $d = (1, 1, 1)^t$.

(b) Berechnen Sie die exakten Eigenwerte der Matrix A und vergleichen Sie die Näherung aus der Potenzmethode mit dem exakten Eigenwert.

Aufgabe 4

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die LR–Zerlegung $A = LR$ ohne Pivotisierung. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dies möglich?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Voraussetzungen für die Cholesky–Zerlegung erfüllt? Bestimmen Sie, falls möglich, die Cholesky–Zerlegung.

Aufgabe 5

Das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

soll mit iterativen Verfahren gelöst werden

(a) Prüfen Sie ob das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren) konvergiert und führen Sie zwei Iterationen durch. Vergleichen Sie den Fehler mit der exakten Lösung.

(b) Prüfen Sie ob das Gauß-Seidel-Verfahrens (Einzelschrittverfahren) konvergiert und führen Sie zwei Iterationen durch. Vergleichen Sie den Fehler mit der exakten Lösung.

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) Erklären Sie das QR-Verfahren (mit Householdermatrizen) zur Zerlegung der Matrix A.

(b) Erklären Sie wie und warum die Kleinstquadrate-Lösung von $Ax = b$ mit Hilfe der QR-Zerlegung berechnet werden kann.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Prüfen Sie die Voraussetzungen für die Cholesky-Zerlegung.

(b) Lösen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (2, 2, 2)^t$.