Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 8, Abgabe: Montag, 03.12.12, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Wenden Sie den Satz von Gerschgorin auf A und A^t an und bestimmen Sie mit einer Zeichnung die Lage der Eigenwerte.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Seien $C_J = -D^{-1}(L+R)$ und $C_G = -(L+D)^{-1}R$ die Matrizen des Gesamtschritt-Verfahrens, bzw. des Einzelschritt-Verfahrens. Zeigen Sie:
Falls

$$\sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n$$

gilt, so erhalten wir

$$\|C_G\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty < 1.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Wir definieren das relaxierte Gesamtschrittverfahren durch

$$x_{k+1} = \omega D^{-1}(b - (L+R)x_k) + (1-\omega)x_k$$

und das relaxierte Einzelschrittverfahren (SOR-Verfahren) durch

$$x_{k+1} = \omega D^{-1}(b - Lx_{k+1} - Rx_k) + (1-\omega)x_k.$$

Seien weiter

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

definiert. Gesucht ist die Lösung von $Ax = b$.

(a) Überprüfen Sie die Konvergenz des klassischen Gesamt- und Einzelschrittverfahrens.

(b) Führen Sie ausgehend von dem Startwert $x_0 = (0,0,0)^t$ jeweils zwei Iterationen des Gesamt- und des Einzelschritt-Verfahrens durch.

(c) Betrachten Sie in b) das relaxierte Gesamt- bzw. Einzelschritt-Verfahren und führen Sie zwei Schritte mit dem Relaxationsparameter $\omega = 0.5$ durch. Vergleichen Sie ihre Ergebnisse mit der exakten Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 4(Programmieraufgabe) : (4 Punkte)
Betrachten Sie das Randwertproblem $-u''(x) = f(x), x \in (0,1), u(0) = u(1) = 0$. Durch $x_i := hi, h := \frac{1}{n+1}, i = 0, ..., n+1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ gegeben. Eine Diskretisierung des Randwertproblems führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, ..., n,$$

wobei $u_0 = u_{n+1} = 0$ gegeben sind und $u_i, i = 1, ..., n$ die gesuchten Näherungswerte für $u(x_i)$ sind. Implementieren Sie das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren zur Lösung dieser Randwertaufgabe, wobei die rechte Seite $f(x)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \pi^2 sin(\pi x),$$

d.h. die exakte Lösung u des Randwertproblems ist gegeben durch $u(x) = sin(\pi x)$. Ihr Programm sollte terminieren, wenn der maximale Fehler $max_i |u_i - u(x_i)|$ kleiner ist als die vorgegebene Schranke $TOL = 10^{-3}$ ist. Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor und berechnen Sie die Näherungslösung $u_h = (u_1, \ldots, u_n)$ und den maximalen Fehler $max_i |u_i - u(x_i)|$. Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

(a) Einlesen der Anzahl der Teilintervalle n und Abfrage, ob das Gesamtschrittverfahren oder das Einzelschrittverfahren verwendet werden soll.

(b) Berechnung des Ergebnisses.

(c) Ausgabe der berechneten Näherungslösung, des maximalen Fehlers und der Anzahl der Iterationsschritte.

Testen Sie Ihr Programm jeweils mit $n \in [20, 40]$ für das GSV und das ESV.

Zusatzfrage: (1 Bonuspunkt) Welches dieser Verfahren (GSV oder ESV) eignet sich besonders gut zur Parallelisierung, d.h. zur Berechnung auf mehreren Prozessoren gleichzeitig? Begründen Sie Ihre Antwort!