Dr. Frank Wübbeling, Dipl.-Math. Hendrik Dirks WS 12/13

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 7, Abgabe: Montag, 26.11.12, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin^2(x) - x$$

im Intervall $I = [-10, 10]$, d.h. $f(\bar{x}) = 0$ mit $\bar{x} \in I$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f in I genau eine Nullstelle besitzt.

(b) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 7.5$, zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und geben Sie für die letzte Approximation x_2 eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

1. Betrachten Sie den Fixpunktsatz von Banach und geben Sie für jede der vier Bedingungen (Banachraum, abgeschlossenes Gebiet, Selbstabbildung, Kontraktion) ein Beispiel für die Notwendigkeit an. Dabei seien jeweils die anderen drei Bedingungen erfüllt.

2. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2x_2 - x_1x_2 + 1 \\ x_1^2 - x_2 + 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, das die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$ besitzt.

   (b) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^t$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\left\|\bar{x} - x^k\right\|_\infty \leq 0.01$ für den Fixpunkt $\bar{x} \in D$ zu erzielen?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei

$$B = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ sodass die Funktion $g(x) = Bx + c$ kontrahierend ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Ein extrem vereinfachtes Modell zur Populationsentwicklung in einem begrenzten Lebensraum ist gegeben durch die Definition $x_{k+1,\lambda} = \lambda x_k(1 - x_{k,\lambda}), k \geq 0$. Hierbei ist $x_{0,\lambda}$ die Anfangspopulation, $x_{k,\lambda}$ die Größe der Population zum Zeitpunkt k und λ ein für jede Iteration fester Umweltparameter.

1. Auf der Webseite zur Vorlesung finden Sie ein Matlab-Programm `chaos(lambdamin, lambdamax)`, das die Populationsentwicklung in Abhängigkeit von λ bei zufälliger Anfangspopulation grafsch darstellt. Zeile j im ausgegebenen Bild steht für einen Wert λ_j im Intervall $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ (angegeben auf der y-Achse). Für jede Zeile werden die Folgenelemente x_{k,λ_j} für $k = 1000, \ldots, 2000$ ausgerechnet und entsprechend der Angabe auf der x-Achse mit einem Punkt in die Grafik eingetragen.
   Beispiel: Falls in einer Zeile nur ein Punkt steht, so sind alle Folgeglieder fast gleich, und die Vermutung liegt nahe, dass die Folge konvergiert.
   Machen Sie sich mit dem Programm vertraut. Betrachten Sie einige interessante Bereiche der Grafik genauer (z.B. $[0.9, 1.1], [3.53, 3.58]$ und $[3.81, 3.86]$). Welche drei verschiedenen Arten des asymptotischen Verhaltens lassen sich beobachten?

2. Untersuchen Sie für $0 \leq \lambda \leq 4$ analytisch, ob es stabile Populationsgrößen (anziehende Fixpunkte) gibt.

3. Betrachten Sie, dass die Folge für $\lambda > 3$ zunächst stabil zwischen zwei Häufungspunkten wechselt. Versuchen Sie nun den Wert von λ anzunähern, bei dem der Wechsel von zwei Häufungspunkten auf vier Häufungspunkte stattfindet.