Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 6, Abgabe: Montag, 19.11.12, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Aus einem Experiment ergeben sich die Wertepaare (t_i, y_i) für $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^m t_i = 0$, $m > 2$. Berechnen Sie die Ausgleichsgerade.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie, dass für die Pseudoinverse A^+ gilt:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(A^+)^+ = A$.

(b) Seien $u \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^m$. Berechnen Sie die Pseudoinverse der folgenden Ausdrücke:

1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A invertierbar.
2. $A = uv^t$.
3. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $A_{ik} = 1\, \forall i, k$.
4. $A = u$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Der Gezeitenwasserstand in der Nordsee werde in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch

$$H(t) = h + a \sin \frac{2\pi t}{12} + b \cos \frac{2\pi t}{12}$$

mit unbekannten Konstanten h, a, b beschrieben. Folgende Messwerte liegen vor:

t	0	2	4	6	8	10	Stunden
H(t)	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Bestimmen Sie die Minimum Norm–Lösung für h, a, b mit Ihrem Programm zur QR–Zerlegung aus dem letzten Aufgabenblatt. Plotten Sie die Ausgleichsfunktion und die Messwerte in einer Grafik.
Bemerkung: Sollte Ihre eigene QR–Zerlegung nicht korrekt funktionieren, so dürfen Sie auch die entsprechende Matlab Funktion verwenden.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$\overline{x} = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^t Ax - b^t x \Longleftrightarrow A\overline{x} = b.$$

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\gamma > 0$, $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

$$\overline{x} = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 + \gamma^2 \|x\|_2^2 \Longleftrightarrow (A^t A + \gamma^2 I)\overline{x} = A^t b.$$

Die durch $A_\gamma^+ b := \overline{x}$ definierte Abbildung heißt Tikhonov–Inverse. Geben Sie mit Hilfe der Singulärwertzerlegung eine explizite Darstellung für A_γ^+ an.

Bemerkung: Aus der expliziten Darstellung folgt sofort

$$A^+ = \lim_{\gamma \mapsto 0} A_\gamma^+ b = \lim_{\gamma \mapsto 0} (A^t A + \gamma^2 I)^{-1} A^t b.$$

Häufig wird auch diese Eigenschaft als Definition der Pseudoinversen benutzt.