Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 5, Abgabe: Montag, 12.11.12, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie von Hand die QR–Zerlegung von A mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren.

(b) Berechnen Sie von Hand die QR–Zerlegung von A mit Householder–Spiegelungen.

Geben Sie in beiden Fällen Q und R explizit an.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie: Sei $m \geq n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann lässt sich die QR–Zerlegung einer Matrix mit $n^2 m - n^3/3$ Rechenoperationen und Divisionen berechnen. Terme niedrigerer Ordnung können müssen nicht extra aufgeführt werden.

(b) Berechnen Sie den Aufwand für die QR–Zerlegung, wenn $A_{ik} = 0$ für $i > k + 1$ (Hessenberg–Form).

(c) Berechnen Sie den Aufwand für die QR–Zerlegung, wenn A zusätzlich symmetrisch ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Zeigen Sie Satz 3.15 (Eindeutigkeit der QR-Zerlegung) aus der Vorlesung.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Programmieren Sie eine Funktion $[QR, \alpha] = myQR(A)$ zur Berechnung der QR–Zerlegung einer Matrix wie in der Vorlesung angegeben. In der Matrix QR sollen die Vektoren v_k in der Diagonale und darunter stehen. Über der Diagonale sollen die Einträge von R stehen. Die noch fehlende Hauptdiagonale von R soll im Vektor α ausgegeben werden.

Programmieren Sie eine Funktion zur Berechnung der Lösung von $Ax = b$ mit der QR–Zerlegung. Eingabeparameter sind b und die Ausgabeparameter QR und α von $myQR(A)$.

Versuchen Sie in beiden Fällen, mit möglichst wenigen Rechenoperationen auszukommen.