Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 4, Abgabe: Montag, 05.11.12, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **Bandmatrix** der Breite b genau dann, wenn nur b Nebendiagonalen besetzt sind, d.h.

$$a_{i,j} = 0 \text{ für } |i-j| > b$$

.

(a) Zeigen Sie, dass sich die LR-Zerlegung von Bandmatrizen der Breite b in $nb^2 + O(np)$ Rechenoperationen berechnen lässt (wir führen die Divisionen nicht extra auf).

(b) Geben Sie die LR-Zerlegung für folgende Bandmatrix an:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei für $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -a & 0 \\ 0 & -a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

.

(a) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die A positiv definit ist.

(b) Geben Sie für $a = 1$ die Cholesky-Zerlegung von A an.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
$T_n(t) = \cos(n \arccos(t))$, $t \in [-1, 1]$, heißt Tschebyscheff-Polynom der Ordnung n.
Zeigen Sie:

(a) Für $n > 0$ ist $2^{-n+1}T_n(t)$ ein Polynom $n-$ten Grades mit Höchstkoeffizient 1.

(b) $\{T_i\}_{i=0}^n$ bilden eine Orthogonalbasis des Polynomraums Π_n bezüglich eines gewichteten reellen $\mathcal{L}^2$-Innenprodukts, d.h.

$$\langle T_i, T_j\rangle := \int_{-1}^{1} T_i(t)T_j(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0 \\ \pi/2, & i = j \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4(Programmieraufgabe) : (4 Punkte)
Programmieren Sie das Cholesky-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in den drei Schritten:

$$A = LL^T \quad Lc = b, \quad L^T x = c.$$

a.) Zeigen Sie, dass Ihr Programm nicht mehr als die in Satz 3.10 angegebene Zahl von Operationen benötigt. Testen Sie das Programm für die Matrizen aus Aufgabe 2b). Wählen Sie einen geeigneten Vektor b.

b.) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}$, stetig und $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Wir erhalten eine Diskretisierung des Intervalls $[a, b]$ durch

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1} = b\,, \quad t_i = a + ih\,, \quad i = 0, 1, ..., n, n+1\,,$$

mit der Schrittweite $h = (b - a)/(n + 1)$.
Lösen Sie mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 f(t_1) + y_a \\ -h^2 f(t_2) \\ \vdots \\ -h^2 f(t_{n-1}) \\ -h^2 f(t_n) + y_b \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $[a, b] = [0, 10]$ für

(1) $\quad f(t) \equiv 1\,, \quad y_a = 0\,, \quad y_b = 50 \quad$ mit $\quad n = 9\,,$

(2) $\quad f(t) = 3t^2\,, \quad y_a = 0\,, \quad y_b = 2500 \quad$ mit $\quad n = 9, 19, 49, 99\,.$