Dr. Frank Wübbeling, Dipl.-Math. Hendrik Dirks WS 12/13

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 13, Abgabe: Montag, 14.01.13, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei X der Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-1,1]$ versehen mit dem Skalarprodukt $(f,g) = \int_{-1}^{1} \omega(x) f(x) g(x) dx$ und der daraus induzierten Norm. Die Gewichtsfunktion sei definiert als $\omega(x) := (x^2+1)$. Bestimmen Sie die orthogonalen Polynome $p_n(x)$ für $n = 0,1,2$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei X wie in Aufgabe 1. Geben Sie die Bestapproximation in $\mathcal{P}_2 \subset X$ an $f(x) = \sin(x)$ an.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Beweisen Sie folgendes Lemma aus der Vorlesung:
Sei $x_0 < \ldots < x_{n+1}$. Dann gibt es genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ und ein $D \in \mathbb{R}$, so dass

$$p(x_k) - f(x_k) = (-1)^k D \,\forall,\ k = 0 \ldots n+1.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Eine Norm $||\cdot||$ auf einem Vektorraum X ist genau dann strikt, wenn gilt

$$(||f+g|| = ||f|| + ||g||,\ f,g \in X) \Rightarrow (f,g \text{ linear abhängig}).$$