Dr. Frank Wübbeling, Dipl.-Math. Hendrik Dirks WS 12/13

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 11, Abgabe: Montag, 07.01.13, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

1. Leiten Sie aus Satz 7.3 ein Einschließungskriterium für die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ her, indem Sie als Näherung für den Eigenwert das Diagonalelement $A_{k,k}$ und als Näherung für den zugehörigen Eigenvektor den k. Einheitsvektor betrachten, $k = 1 \dots n$.

2. Wenden Sie das Kriterium auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

an und vergleichen Sie mit den Gerschgorin–Kreisen für A. Welche beste Aussage über die Lage der Eigenwerte können Sie treffen?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Potenzmethode schnell konvergiert, wenn die Matrix diagonalisierbar ist und der eindeutige betragsmaximale Eigenwert mehrmals auftritt.

2. Leiten Sie ausgehend von der Potenzmethode einen Algorithmus her, der unter anzugebenden Bedingungen gegen den Eigenwert konvergiert, der am nächsten an 5 liegt. Sie dürfen für die Konvergenz vom einfachsten Fall (die Eigenwerte aller auftretenden Matrizen haben unterschiedliche Beträge) ausgehen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Bei der Berechnung der Grundfrequenzen und Schwingungsformen eines linearen Schwingungssystems stellt sich die Aufgabe der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie für $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Potenzmethode vier Iterationen zur Bestimmung des größten Eigenwertes von A.

(b) Bestimmen Sie für $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = 11$ den größten Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor der Matrix A. Benutzen Sie a) zur Berechnung einer Näherung und vergleichen Sie die Resultate. Erklären Sie insbesondere die schlechte Konvergenz des Eigenvektors.

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Programmieren Sie die Potenzmethode. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten mit wachsender Iterationszahl anhand einiger 10×10–Matrizen, die die in der Vorlesung behandelten Fälle abdecken. Stellen Sie für drei typische Matrizen den Iterationsverlauf graphisch dar.