Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 10, Abgabe: Montag, 17.12.12, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gesucht ist das Minimum der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(x,y) = (y - x^2)^2 + (1-x)^2$. Stellen Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung des Minimums von h auf, indem Sie die Gleichung $f(x,y) := \nabla h(x,y) = 0$ betrachten. Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $(0,0)^t$ die erste Iteration des Verfahrens.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $b = (0, -1, -1, 0)^t$. Führen Sie, falls möglich, mit $x^{(0)} = (0,0,0,0)^t$ für jedes System zwei Schritte des CG-Verfahrens durch. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Lösung des Gleichungssystems.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Zu lösen sei das Gleichungssystem Ax=b mit einer s.p.d. Matrix A. Zur Lösung wird das line search–Verfahren gewählt. Als Suchrichtungen $d^{(k)}$ werden nacheinander die Einheitsvektoren gewählt, hat man alle durch, fängt man wieder von vorn an. Die $\alpha^{(k)}$ werden wie in der Vorlesung optimal gewählt mit

$$\alpha^{(k)} = \frac{(r^{(k)}, d^{(k)})}{(d^{(k)}, Ad^{(k)})}.$$

Welches Verfahren erhalten Sie?

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Implementieren Sie das cg–Verfahren und das Gradientenverfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ s.p.d., $b \in \mathbb{R}^m$. Die Funktion zur Lösung des LGS sollte von der Form `cg(A, b, x0, eps)` bzw. `lingrad(A, b, x0, eps)` sein und neben der Näherungslösung auch die Anzahl der durchgeführten Iterationen zurückgeben. Der Parameter eps sollte für das Abbruchkriterium $< r_n, r_n > \leq eps$ verwendet werden.

(a) Testen Sie Ihre Verfahren mit $m = 601$ anhand der Matrix $A = (a_{ij})$:

$$a_{ii} = 4, a_{ij} = -1 \text{ falls } j = i+1, j = i-1, j = m+1-i$$

und $b = Ax$, $x_i = i$.
Berechnen Sie dann für einige Werte von m die benötigten Iterationen für die jeweiligen Verfahren und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar.

(b) Hilbertmatrix: Ein notorisch schlecht konditioniertes Problem ist $Ax = b$ mit

$$a_{ij} = (i + j - 1)^{-1}, (i, j = 1, \ldots, m)$$

und $b = Ax$, $x_i = (-1)^{i-1}$.
Testen Sie die Verfahren mit $m = 5$ und $m = 10$. Wählen Sie für eps 1e-13 und 1e-8. Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor. Geben Sie jeweils den maximalen Fehler zur exakten Lösung sowie die Anzahl der Iterationen an.