Prof. Dr. M. Burger, Dr. Marzena Franek, Dipl.-Math. Hendrik Dirks WS 11/12

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 9, Abgabe: Donnerstag, 12.01.12, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. A sei regulär, aber nicht notwendigerweise symmetrisch oder positiv definit. Statt$Ax = b$ zu lösen, betrachten wir nun $A^T Ax = A^T b$.

(a) Warum konvergiert das CG-Verfahren für das lineare Gleichungssystem $A^T Ax = A^T b$ auf jeden Fall?

(b) Vergleichen Sie die Kondition von A und $A^T A$ und deuten Sie das Ergebnis bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $A = L+D+R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = I_n$, wobei I_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Sei T die zugehörige Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens zur Lösung von $Ax = b$. Die Eigenwerte λ_i der Matrix T seien reell und erfüllen $-1 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n < 1$. Für $\omega \in \mathbb{R}$ sei das Relaxationsverfahren durch die Iterationsmatrix $T(\omega) = (1-\omega)I_n + \omega T$ und die Iterationsvorschrift $x^{k+1} = T(\omega)x^k + D^{-1}, x^0 \in \mathbb{R}^n$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $T(\omega)$ die Eigenwerte $\mu_i = 1 - \omega + \omega\lambda_i, i = 1, ..., n$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie ω_0 so, dass der Spektralradius von $T(\omega_0)$ minimal wird.

(c) Zeigen Sie, dass der Spektralradius von $T(\omega_0)$ für $|\lambda_1| \neq |\lambda_n|$ kleiner als der Spektralradius von $T(1) = T$ ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Vergleichen Sie zur Berechnung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Richardson-Iteration $x^{k+1} = b + (I - A)x^k$ mit der vorkonditionierten Richardson Iteration $x^{k+1} = D^{-1}b + (I - D^{-1}A)x^k$. Beginnen Sie mit dem Nullvektor als Startwert. Vergleichen Sie nun die Lösung der beiden Verfahren nach 4 Iterationsschritten mit der exakten Lösung und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.
Hinweis: D steht für die Diagonale der Matrix A.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 12.01.2012, 12.00 Uhr)
Betrachten Sie das Randwertproblem $-u''(x) = f(x), x \in (0,1), u(0) = u(1) = 0$. Durch $x_i := hi, h := \frac{1}{n+1}, i = 0, ..., n+1$ ist eine Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ gegeben. Eine Diskretisierung des Randwertproblems führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, ..., n,$$

wobei $u_0 = u_{n+1} = 0$ gegeben sind und $u_i, i = 1, ..., n$ die gesuchten Näherungswerte für $u(x_i)$ sind. Implementieren Sie das Gesamtschritt- und das Einzelschrittverfahren zur Lösung dieser Randwertaufgabe, wobei die rechte Seite $f(x)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \pi^2 sin(\pi x),$$

d.h. die exakte Lösung u des Randwertproblems ist gegeben durch $u(x) = sin(\pi x)$. Ihr Programm sollte terminieren, wenn maximale Fehler $max_i|u_i - u(x_i)|$ kleiner ist als die vorgegebene Schranke $TOL = 10^{-3}$ ist. Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor und berechnen Sie die Näherungslösung $u_h = (u_1, \dots, u_n)$ und den maximalen Fehler $max_i|u_i - u(x_i)|$. Ihr Programm sollte folgende Elemente enthalten:

(a) Einlesen der Anzahl der Teilintervalle n und Abfrage, ob das Gesamtschrittverfahren oder das Einzelschrittverfahren verwendet werden soll.

(b) Berechnung des Ergebnisses.

(c) Ausgabe der berechneten Näherungslösung, des maximalen Fehlers und der Anzahl der Iterationsschritte.

Testen Sie Ihr Programm jeweils mit $n \in [20, 40]$ für das GSV und das ESV.

Zusatzfrage: (1 Bonuspunkt) Welches dieser Verfahren (GSV oder ESV) eignet sich besonders gut zur Parallelisierung, d.h. zur Berechnung auf mehreren Prozessoren gleichzeitig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bonusaufgabe 5: (Programmieraufgabe, Abgabe: 12.01.2012, 12.00 Uhr)
Implementieren Sie das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ gegeben und A positiv definit und symmetrisch. Die Funktion zur Lösung des LGS sollte von der Form `cg(A, b, z1, eps)` sein und neben der Näherungslösung auch die Anzahl der durchgeführten Iterationen zurückgeben. Der Parameter eps sollte für das Abbruchkriterium $< r_n, r_n > \leq eps$ verwendet werden.

(a) Testen Sie Ihr Verfahren mit $m = 601$ anhand der Matrix $A = (a_{ij})$ mit $i, j = 1, \dots, m:$

$$a_{ii} = 4, a_{ij} = -1 \text{ falls } j \neq i \text{ und } j = i+1, j = i-1, j = m+1-i$$

und der rechten Seite

$$b_i = -m - 1 + 3i \text{ für } i \neq \frac{m}{2} \text{ und } i \neq m, b_{\frac{m}{2}} = m+1, b_m = 3m.$$

Die exakte Lösung ist $x_i = i$.

(b) Hilbert Matrix: Ein notorisch schlecht konditioniertes Problem ist $Ax = b$ mit

$$a_{ij} = (i + j - 1)^{-1}, b_i = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1}(i + j - 1)^{-1}, (i, j = 1, \dots, m)$$

und exakter Lösung $x_i = (-1)^{i-1} i = 1, \dots, m$. Testen Sie das cg-Verfahren mit $m = 5$ und $m = 10$.

Wählen Sie für eps zum einen 1e-13 und zum anderen 1e-8. Verwenden Sie als Startvektor den Nullvektor. Geben Sie jeweils den maximalen Fehler zur exakten Lösung sowie die Anzahl der Iterationen im cg-Verfahren an.