Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 8, Abgabe: Donnerstag, 15.12.11, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Betrachten Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -2 \\ 4 & 9 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

das Jacobi-Verfahren $x_{k+1} = -D^{-1}(L+R)x_k + D^{-1}b$ und das Gauß-Seidel-Verfahren $x_{k+1} = -(D+L)^{-1}Rx_k + (D+L)^{-1}b$.

a) Überprüfen Sie die Konvergenz der Verfahren.

b) Führen Sie ausgehend von dem Startwert $x_0 = (0,0,0)^T$ jeweils zwei Iterationen des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens durch.

c) Betrachten Sie in b) das relaxierte Jacobi- bzw. Gauß-Seidel-Verfahren und führen Sie zwei Schritte mit dem Relaxationsparameter $\omega = 0.5$ durch.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Seien $C_J = -D^{-1}(L+R)$ und $C_G = -(L+D)^{-1}R$ die Matrizen des Jacobi-Verfahrens, bzw. des Gauß-Seidel-Verfahrens.
Zeigen Sie: Falls

$$\sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}| \quad i = 1,..,n$$

gilt, so erhalten wir

$$\|C_G\|_\infty \leq \|C_J\|_\infty < 1.$$

Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}^n,\ y := C_G x$ zeige man induktiv $|y_k| \leq \|C_J\|_\infty \|x\|_\infty$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $b = (0,-1,-1,0)^T$. Führen Sie, falls möglich, mit $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$ für jedes System zwei Schritte des CG-Verfahrens durch.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 15.12.2011, 12.00 Uhr)

Programmieren Sie das QR-Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix. Führen Sie das Programm an den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -5 & -2 \\ 6 & 9 & -5 & 2 \\ -5 & -5 & 7 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

aus. Iterieren Sie solange, bis die Matrix hinreichend diagonal ist, d.h. bis

$$\frac{\sum_{i \neq j} |a_{ij}|}{\sum_i |a_{ii}|} < 10^{-4}.$$

Um den Rechenaufwand zu reduzieren erweitern Sie Ihr Programm um eine Matlab-Funktion zur Transformation der Matrix auf Tridiagonal-Form. Wenden Sie dieses Programm auf A und B an und erläutern Sie den Unterschied.