

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 7, Abgabe: Donnerstag, 08.12.11, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Bei der Berechnung der Grundfrequenzen und Schwingungsformen eines linearen Schwingungssystems stellt sich die Aufgabe der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie für $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Potenzmethode vier Iterationen zur Bestimmung des größten Eigenwertes von A .
- (b) Bestimmen Sie für $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = 11$ den größten Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor der Matrix A . Benutzen Sie a) zur Berechnung einer Näherung und vergleichen Sie die Resultate. Erklären Sie insbesondere die schlechte Konvergenz des Eigenvektors.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Für $i = 1, \dots, n$ definieren wir den i -ten Gerschgorin Kreis G_i folgendermaßen:

$$G_i := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i\}, \quad r_i := \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Zeigen Sie:

- (a) Ist λ Eigenwert von A , so gilt $\lambda \in \bigcup_{i=1}^n G_i$.
- (b) Hat die Vereinigung \hat{G} von m Kreisen G_i einen leeren Schnitt mit den restlichen $n-m$ Kreisen, so enthält \hat{G} genau m Eigenwerte von A (gezählt mit ihren algebraischen Vielfachheiten).

Hinweis zu (b): Betrachten Sie die Matrizen A_ϵ

$$(A_\epsilon)_{ik} = \begin{cases} A_{ik}, & i = k \\ \epsilon A_{ik}, & i \neq k \end{cases}$$

und lassen Sie ϵ von 0 bis 1 laufen.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Wenden Sie den Satz von Gerschgorin auf A und A^t an und bestimmen Sie mit einer Zeichnung die Lage der Eigenwerte.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 15.12.2011, 12.00 Uhr)

Programmieren Sie die Potenzmethode und die inverse Potenzmethode und testen Sie Ihren Algorithmus an der Aufgabe 1 b).

***Aufgabe 5:** (4 Bonuspunkte)

Erstellen Sie mit Hilfe von Matlab ein weihnachtliches Motiv und heften Sie es vorn an Ihren Übungszettel. Die schönsten „Zeichnungen“ werden in der Facebook-Gruppe veröffentlicht:

<https://www.facebook.com/groups/257167280993405>