Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 6, Abgabe: Donnerstag, 01.12.11, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^3(\mathbb{R})$. Für ein $\bar{x} \in \mathbb{R}$ gelte $f(\bar{x}) = 0, f'(\bar{x}) = 0$ und $f''(\bar{x}) \neq 0$, d.h. f hat eine doppelte Nullstelle in $\bar{x}$. Wir betrachten das modifizierte Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - c\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Was ist die optimale Wahl von $c \in \mathbb{R}$, um quadratische Konvergenz des Verfahrens zu erhalten?
Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung für f und f' um den Punkt $\bar{x}$ bis zur Ordnung drei.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > \frac{1}{2}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ |x|^\alpha, & x < 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie: Die Newton-Iteration konvergiert für $x_0 > 0$. Bestimmen Sie die Konvergenzordnung.

(b) Sei $a > 0$ und $f(x) = a - \frac{1}{x}$. Zeigen Sie: Für $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei A eine positiv definite Matrix. Dann gibt es genau eine positive definite Matrix X mit $X^2 = A$ (gemeint ist die Matrixmultiplikation). Man schreibt auch $X = A^{1/2}$. Möchte man diese Matrix bestimmen, so kann man das Gleichungssystem $F(X) = 0$ mit $F(X) = X^2 - A$ lösen.

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für $F(X) = 0$ die Form

$$X_{k+1}X_k + X_kX_{k+1} = A + X_k^2$$

hat.

(b) Berechnen Sie eine Approximation X_1 für $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{1/2}$ durch einen Schritt des Newton-Verfahrens mit der Startnäherung $X_0 = I$ und zeigen Sie, dass

$$\|X_1^2 - A\|_\infty \leq \frac{1}{16}.$$

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 8.12.2011, 12.00 Uhr)

a) Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie bereits das Newton-Verfahren implementiert. Schreiben Sie nun eine MATLAB-Routine `Intervallschachtelung.m` zur Nullstellensuche einer Funktion f, welches auf dem Prinzip der Intervallschachtelung basiert. Als Eingabeparameter soll Ihre Routine die Intervallgrenzen a und b eines Startintervalls $[a, b]$, eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Ableitung $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie eine Toleranz $tol > 0$ für das Abbruchkriterium erwarten.

Programmieren Sie nun eine Kombination aus Intervallschachtelung und Newton-Verfahren. Ihre Routine `NewtonSchachtelung.m` soll zunächst einige Iterationen der Intervallschachtelung durchführen, bis eine Intervallgröße $|b - a| < tol_1$ erreicht ist. Dann soll das Newton-Verfahren die Nullstelle bis auf eine Genauigkeit von tol_2 bestimmen.

Die Rückgabewerte sollten die berechnete Näherungslösung $\bar{x} \in \mathbb{R}$ sowie die Anzahl der durchgeführten Iterationen (a) des Intervallschachtelungsverfahrens und (b) des Newton-Verfahrens sein. Außerdem sollte ein Array übergeben werden, welches ausgehend von dem Startpunkt x(0) alle Iterierten x(k) enthält.

b) Die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0, \\ (12(x-1) - 4(x-1)^3)/8, & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{für } x > 2, \end{cases}$$

Schreiben Sie MATLAB-Funktionen `NewtonSchachtelung_f.m` und `NewtonSchachtelung_df.m`, welche die Funktion f bzw. deren Ableitung f' implementieren. Plotten Sie die Funktion f im Intervall $[-1, 3]$.

c) Testen Sie die Funktionalität Ihrer Routine `NewtonSchachtelung.m` zur Nullstellensuche dieser Funktion f. Verwenden Sie für das Startintervall $a = 0$ und $b = 100$ und als Toleranz $tol_1 = 10^{-2}, tol_2 = 10^{-15}$. Geben Sie den Wert der Näherungslösung und die Anzahl der durchgeführten Iterationen (Intervallschachtelung / Newton) aus. Plotten Sie den logarithmischen absoluten Fehler (exakte Lösung: $x = 1$) gegen die Anzahl der Iterationen.