Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 5, Abgabe: Donnerstag, 24.11.11, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin^2(x) - x$$

im Intervall $I = [-10, 10]$, d.h. $f(\bar{x}) = 0$ mit $\bar{x} \in I$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f in I genau eine Nullstelle besitzt.

(b) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 7.5$, zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und geben Sie für die letzte Approximation x_2 eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3}x_2^2 \\ 1 - \frac{1}{4}x_1^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$ besitzt.

(b) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^T$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\left\|\bar{x} - x^k\right\|_\infty \leq 10^{-6}$ für den Fixpunkt $\bar{x} \in D$ zu erzielen?

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion mit Minimum $\bar{x}$. In einer Umgebung des Minimums sei g zwei mal stetig differenzierbar.
Zeigen Sie, für jede abgeschlossene Kugel um $\bar{x}$ mit Radius R existiert ein $\tau = \tau(R)$, sodass $\Phi(x) = x - \tau\nabla g(x)$ kontraktiv auf der Kugel ist.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 01.12.2011, 12.00 Uhr)
Programmieren Sie das n–dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle $\overline{x}$ einer C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

(a) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslöung des folgenden chemischen Systems gesucht:

$$\begin{array}{rcccccc} CH_4 & + & \frac{1}{2}O_2 & \rightleftharpoons & CO & + & 2H_2 \\ CH_4 & + & H_2O & \rightleftharpoons & CO & + & 3H_2 \\ H_2 & + & CO_2 & \rightleftharpoons & CO & + & H_2O\,. \end{array}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem $f(x_1,\dots,x_7)=0$ für die Konzentration $x\in\mathbb{R}^7$ mit

$$f(x_1,\dots,x_7)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{x_6}{x_7} \\ x_3+x_4+2x_5-\frac{2}{x_7} \\ x_1+x_2+x_5-\frac{1}{x_7} \\ -28837x_1-139009x_2-78213x_3+18927x_4 \\ \qquad +8427x_5+\frac{13492}{x_7}-10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5-1 \\ 400x_1x_4^3-1.7837\cdot 10^5 x_3x_5 \\ x_1x_3-2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten: $x_1=x_4=x_6=0.5$, $x_2=x_3=x_5=0$, $x_7=2.0$.

(b) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x,y)=100(y-x^2)^2+(1-x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt $(\bar{x},\bar{y})=(1,1)$. Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung $f(x,y):=\nabla h(x,y)=0$ im Punkt $(x_0,y_0)=(-0.5,0.5)$. Prüfen Sie die Hesse-Matrix von $h(x,y)$ auf Positiv-Definitheit.

<u>Hinweise:</u> Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium $\|f(x)\|_2\le 10^{-10}$. Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren oder eine geeignete Matlab Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k=-f(x^k)\,,\qquad x^{k+1}=x^k+d^k\,.$$