

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 5, Abgabe: Donnerstag, 24.11.11, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin^2(x) - x$$

im Intervall $I = [-10, 10]$, d.h. $f(\bar{x}) = 0$ mit $\bar{x} \in I$.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f in I genau eine Nullstelle besitzt.
- (b) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 7.5$, zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und geben Sie für die letzte Approximation x_2 eine Fehlerabschätzung an.

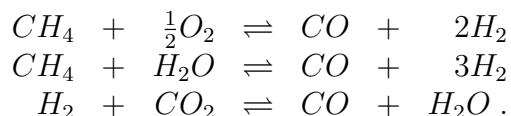
Aufgabe 2: (4 Punkte)Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3}x_2^2 \\ 1 - \frac{1}{4}x_1^2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung g auf der Menge $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ genau einen Fixpunkt $\bar{x} \in D$ besitzt.
- (b) Berechnen Sie $x^1 = g(x^0)$ mit $x^0 = (0.5, 0.5)^T$. Wieviele Iterationen k benötigt man, um die Genauigkeit $\|\bar{x} - x^k\|_\infty \leq 10^{-6}$ für den Fixpunkt $\bar{x} \in D$ zu erzielen?

Aufgabe 3: (4 Punkte)Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine strikt konvexe Funktion mit Minimum \bar{x} . In einer Umgebung des Minimums sei g zwei mal stetig differenzierbar.Zeigen Sie, für jede abgeschlossene Kugel um \bar{x} mit Radius R existiert ein $\tau = \tau(R)$, sodass $\Phi(x) = x - \tau \nabla g(x)$ kontraktiv auf der Kugel ist.**Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 01.12.2011, 12.00 Uhr)**Programmieren Sie das n -dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle \bar{x} einer C^2 -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

- (a) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslösung des folgenden chemischen Systems gesucht:



Dies führt auf das Gleichungssystem $f(x_1, \dots, x_7) = 0$ für die Konzentration $x \in \mathbb{R}^7$ mit

$$f(x_1, \dots, x_7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{x_6}{x_7} \\ x_3 + x_4 + 2x_5 - \frac{2}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{x_7} \\ -28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 \\ \quad + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 \\ 400x_1x_4^3 - 1.7837 \cdot 10^5 x_3x_5 \\ x_1x_3 - 2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten: $x_1 = x_4 = x_6 = 0.5$, $x_2 = x_3 = x_5 = 0$, $x_7 = 2.0$.

- (b) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$. Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung $f(x, y) := \nabla h(x, y) = 0$ im Punkt $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.5)$. Prüfen Sie die Hesse-Matrix von $h(x, y)$ auf Positiv-Definitheit.

Hinweise: Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium $\|f(x)\|_2 \leq 10^{-10}$. Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren oder eine geeignete Matlab Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + d^k.$$