

## Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 5, Abgabe: Donnerstag, 24.11.11, 12.00 Uhr

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin^2(x) - x$$

im Intervall  $I = [-10, 10]$ , d.h.  $f(\bar{x}) = 0$  mit  $\bar{x} \in I$ .

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass  $f$  in  $I$  genau eine Nullstelle besitzt.
- (b) Führen Sie, ausgehend vom Startwert  $x_0 = 7.5$ , zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und geben Sie für die letzte Approximation  $x_2$  eine Fehlerabschätzung an.

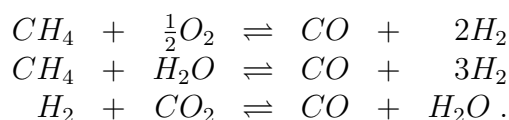
**Aufgabe 2:** (4 Punkte)Sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Abbildung mit

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3}x_2^2 \\ 1 - \frac{1}{4}x_1^2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung  $g$  auf der Menge  $D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$  genau einen Fixpunkt  $\bar{x} \in D$  besitzt.
- (b) Berechnen Sie  $x^1 = g(x^0)$  mit  $x^0 = (0.5, 0.5)^T$ . Wieviele Iterationen  $k$  benötigt man, um die Genauigkeit  $\|\bar{x} - x^k\|_\infty \leq 10^{-6}$  für den Fixpunkt  $\bar{x} \in D$  zu erzielen?

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)Sei  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine strikt konvexe Funktion mit Minimum  $\bar{x}$ . In einer Umgebung des Minimums sei  $g$  zwei mal stetig differenzierbar.Zeigen Sie, für jede abgeschlossene Kugel um  $\bar{x}$  mit Radius  $R$  existiert ein  $\tau = \tau(R)$ , sodass  $\Phi(x) = x - \tau \nabla g(x)$  kontraktiv auf der Kugel ist.**Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 01.12.2011, 12.00 Uhr)**Programmieren Sie das  $n$ -dimensionale Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle  $\bar{x}$  einer  $C^2$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Lösen Sie die folgenden nicht-linearen Gleichungssysteme:

- (a) Bei der Gewinnung von Wasserstoff aus Methan wird die Gleichgewichtslösung des folgenden chemischen Systems gesucht:



Dies führt auf das Gleichungssystem  $f(x_1, \dots, x_7) = 0$  für die Konzentration  $x \in \mathbb{R}^7$  mit

$$f(x_1, \dots, x_7) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{x_6}{x_7} \\ x_3 + x_4 + 2x_5 - \frac{2}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{x_7} \\ -28837x_1 - 139009x_2 - 78213x_3 + 18927x_4 \\ \quad + 8427x_5 + \frac{13492}{x_7} - 10690\frac{x_6}{x_7} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1 \\ 400x_1x_4^3 - 1.7837 \cdot 10^5 x_3x_5 \\ x_1x_3 - 2.6058x_2x_4 \end{pmatrix}$$

Nehmen Sie die Startdaten:  $x_1 = x_4 = x_6 = 0.5$ ,  $x_2 = x_3 = x_5 = 0$ ,  $x_7 = 2.0$ .

(b) Das Minimum der *Rosenbrock*-Funktion

$$h(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

ist offensichtlich der Punkt  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ . Starten Sie die Newton-Iteration für die Gleichung  $f(x, y) := \nabla h(x, y) = 0$  im Punkt  $(x_0, y_0) = (-0.5, 0.5)$ . Prüfen Sie die Hesse-Matrix von  $h(x, y)$  auf Positiv-Definitheit.

Hinweise: Setzen Sie für alle Teilaufgaben das Abbruchkriterium  $\|f(x)\|_2 \leq 10^{-10}$ . Benutzen Sie das Gaußeliminationsverfahren oder eine geeignete Matlab Routine zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)d^k = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + d^k.$$