Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 3, Abgabe: Donnerstag, 10.11.11, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Gegeben sei eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sei weiter κ_2 die Kondition bezüglich der Spektralnorm. Beweisen Sie:

(a) $\kappa_2(Q) = 1$, wenn Q orthogonal,

(b) $\kappa_2(QA) = \kappa_2(A)$, wenn Q orthogonal.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Kondition κ_2 der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Die p-Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind für $1 \leq p < \infty$ definiert durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

und für $p = \infty$ durch

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Zeigen Sie für die zugeordneten Matrixnormen

$$\|A\|_p := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die folgenden Aussagen:

a) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$

b) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 10.11.2011, 12.00 Uhr)
Programmieren Sie das Cholesky-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ in den drei Schritten:

$$A = LL^T \quad Lc = b, \quad L^T x = c.$$

a.) Testen Sie das Programm für die Matrizen aus Aufgabe 3 vom zweiten Zettel. Wählen Sie einen geeigneten Vektor b.

b.) Gegeben seien eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ a < b \in \mathbb{R}$, und Werte $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Wir erhalten eine Diskretisierung des Intervalls $[a, b]$ durch

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < t_{n+1} = b\,, \quad t_i = a + ih\,, \quad i = 0, 1, ..., n, n + 1\,,$$

mit der Schrittweite $h = (b - a)/(n + 1)$.
Lösen Sie mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 f(t_1) + y_a \\ -h^2 f(t_2) \\ \vdots \\ -h^2 f(t_{n-1}) \\ -h^2 f(t_n) + y_b \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $[a, b] = [0, 10]$ für

(1) $\quad f(t) \equiv 1\,, \quad y_a = 0\,, \quad y_b = 50 \quad$ mit $\quad n = 9\,,$
(2) $\quad f(t) = 3t^2\,, \quad y_a = 0\,, \quad y_b = 2500 \quad$ mit $\quad n = 9, 19, 49, 99\,.$