# Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 2, Abgabe: **Mittwoch, 02.11.11, 12.00 Uhr**

**Übungstermine:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gruppe 1: | Mo. | 14 - 16 Uhr | SR1C | BK | 84 | (Paul Striewski) |
| Gruppe 2: | Mo. | 14 - 16 Uhr | SR1D | BK | 81 | (Lena Frerking) |
| Gruppe 3: | Mo. | 16 - 18 Uhr | SR1C | BK | 86 | (Alexander Brück) |
| Gruppe 4: | Di. | 08 - 10 Uhr | SR1C | BK | 84 | (Paul Striewski) |
| Gruppe 5: | Di. | 12 - 14 Uhr | M4 | BK | 85 | (Malte Hebing) |
| Gruppe 6: | Di. | 12 - 14 Uhr | M5 | BK | 87 | (Christian Himpe) |

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)
Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

mit Spaltenpivotsuche. Führen Sie dabei alle Zwischenschritte auf und geben Sie die Matrizen P, L und R an.

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist strikt diagonaldominant, falls

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \text{für } i = 1, ..., n.$$

Zeigen Sie, dass eine strikt diagonaldominante Matrix $A$ eine eindeutige LR-Zerlegung besitzt.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)
a) Zeigen Sie, dass für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 13 & 13 \\ 10 & 13 & 27 \end{pmatrix}$$

die Voraussetzungen für die Cholesky-Zerlegung erfüllt sind. Untersuchen Sie zur Feststellung der Definitheit die Hauptminoren.
b) Berechnen Sie für $A$ und $B$ die Cholesky-Zerlegung und überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Matlab. Benutzen Sie dazu den Befehl `chol`.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)
Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie eine Lösung, bei der Sie jedes Zwischenergebnis auf eine Stelle runden. Vergleichen Sie exakte und genäherte Lösung und geben Sie den absoluten und den relativen Fehler an.

**Aufgabe 5:** (4 Punkte)
Sei $(x, y)$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die absoluten und relativen Fehler von x und y, wenn A = 1000 und B = 1005 bis auf einen relativen Eingabefehler $\epsilon$ gegeben sind, also $\tilde{A} = A(1+\epsilon_1)$ und $\tilde{B} = B(1+\epsilon_2)$ mit $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| < \epsilon$

**Aufgabe 6: (Programmieraufgabe, Abgabe: Mittwoch, 02.11.11, 12.00 Uhr)**
Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$, mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Es soll sowohl die Berechnung mit als auch ohne Spaltenpivotsuche möglich sein.
Die Matrix $A$ und der Vektor $b$ sollen übergeben werden. Nach dem Ablauf des Programms soll in der Matrix $A$ die LR-Zerlegung gespeichert sein, in dem Vektor $b$ die Lösung $x$. Die Permutationsmatrix soll dabei in einem Vektor ausgegeben werden.

(a) Testen Sie das Programm an den Aufgaben 1 und 2 vom Übungsblatt 1 sowie an Aufgabe 4.

(b) Berechnen Sie mit und ohne Spaltenpivotsuche die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 10^{-l} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \quad l = 6, \ldots, 20\,.$$

(c) Vergleichen Sie die Rechenzeit Ihres Algorithmus mit der Rechenzeit der Matlab-Routine $A\backslash b$. Zur Zeitmessung benutzen Sie die Matlab-Funktionen `tic` und `toc`. Machen Sie sich mit dem Matlab-Befehl `rand` vertraut, um eine Zufallsmatrix $A$ und einen Zufallsvektor $b$ zu erzeugen. Wählen Sie $n = 5, 10, 50, 100, 1000$.
Die Matlab-Routine $A\backslash b$ arbeitet parallelisiert, d.h. auf mehreren Rechenkernen gleichzeitig. Um einen genauen Vergleich machen zu können sorgen Sie am besten mit dem Befehl » `maxNumCompThreads(1)` dafür, dass nur auf einem Kern gerechnet wird.

**Bitte geben Sie die Programmieraufgabe mit Ergebnis in ausgedruckter Form ab und senden Sie beides zusätzlich per E-mail an Ihren Übungsgruppenleiter.**