

Übungen zur Vorlesung Numerische Lineare Algebra

Klausurvorbereitung

Aufgabe 1:

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}\sin^2(x) - x$$

in Intervall $I = [-10, 10]$, d.h. $\bar{f}(x)$ mit $\bar{x} \in I$.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f in I genau eine Nullstelle besitzt.
- (b) Führen Sie, ausgehend von Startwert $x_0 = 7.5$, zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und geben Sie für die letzte Approximation x_2 eine Fehlerabschätzung an.

Aufgabe 2:

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & \frac{10}{9} & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Überprüfen Sie die Voraussetzungen für eine Cholesky-Zerlegung von A .
- (b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^T$

Aufgabe 3:

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Erläutern Sie das Uzawa Verfahren
- (b) Führen Sie zwei Schritte des Uzawa-Verfahrens mit Startwert $y_0 = -1$ und Dämpfungsparameter $\omega = 0.1$ durch.

Aufgabe 4:

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die exakten Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix A .

(b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^0 = (1, 1, 1)^T$ drei Schritte der Potenzmethode durch. Geben Sie eine Approximation des größten Eigenwerts und des zugehörigen Eigenvektors an.

Aufgabe 5:

Zu den fünf Punkten $(t_i, f(t_i))$ mit $t_1 = -1, t_2 = -c, t_3 = 0, t_4 = c, t_5 = 1$ ($0 < c < 1$) soll eine Ausgleichsfunktion

$$u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3$$

mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, 2, 3$ gelegt werden.

(a) Bestimmen Sie die Matrix A des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems und geben Sie die Normalengleichungen für das Problem an.

(b) Berechnen Sie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ und α_3 für den Spezialfall $f(t_1) = f(t_5) = 0, f(t_2) = f(t_4) = 1$ und $f(t_3) = 2$. Beachten Sie, dass $0 < c < 1$ gilt.

Aufgabe 6:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung und geben Sie die Pivotmatrix P an.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der berechneten LR-Zerlegung.

(c) Berechnen Sie zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens (Gesamtschrittverfahren) mit Startvektor $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) Berechnen Sie zwei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens (Einzelschrittverfahren) mit

Startvektor $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7:

Gegeben Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x_1, x_2) = (x_1 x_2 + x_2 - 1, x_1^2 - x_2 + 1)$$

Zur Bestimmung einer Nullstelle soll das Newton-Verfahren benutzt werden.

(a) Stellen Sie das Verfahren auf.

(b) Führen Sie eine Iteration mit Startvektor $u_0 = (1, 1)$ durch.