Dr. Frank Wübbeling, Dipl.-Math. Marzena Franek WS 10/11

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 9, Abgabe: Montag, 13.12.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Seien $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ die Tschebyscheff-Polynome für $t \in [-1, 1]$. Zeigen Sie:

(a) $2^{-n}T_n(t)$ ist ein Polynom n-ten Grades mit Höchstkoeffizient 1.

(b) $\{T_i\}_{i=0}^n$ bilden eine Orthogonalbasis des Polynomraums Π_n bezüglich eines gewichteten reellen $\mathcal{L}^2$-Innenprodukts, d.h.

$$\langle T_i, T_j \rangle := \int_{-1}^{1} T_i(t)T_j(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \pi, & i = j = 0, \\ \pi/2, & i = j \neq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)
Sei $\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ die Kondition der symmetrischen und positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, wobei $\lambda_{\max}$ der größte und $\lambda_{\min}$ der kleinste Eigenwert von A sei. Seien (z_k) die durch das cg-Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ generierte Folge von Näherungslösungen und $\|y\|_A := \sqrt{\langle Ay, y\rangle}$ für $y \in \mathbb{R}^m$.

(a) Betrachten Sie das Polynom

$$\hat{p}(\lambda) = \frac{T_n((\lambda_{\max} + \lambda_{\min} - 2\lambda)/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}))}{T_n((\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}))},$$

mit dem Tschebyscheff-Polynom

$$T_n(t) := \begin{cases} \cos(n \arccos t) & \text{für } |t| \leq 1, \\ \frac{1}{2}\left[\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^n + \left(t + \sqrt{t^2-1}\right)^{-n}\right] & \text{für } |t| > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie

$$\max_{\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}} |\hat{p}(\lambda)| = \frac{1}{T_n((\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}))}.$$

(b) Unter Verwendung der obigen Darstellung der Tschebyscheff-Polynome zeige man weiter, dass gilt:

$$T_n((\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)}+1}{\sqrt{\kappa(A)}-1}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{\kappa(A)}+1}{\sqrt{\kappa(A)}-1}\right)^{-n}\right).$$

(c) Folgern Sie schließlich die Konvergenz des cg-Verfahrens:

$$\|z_n - x\|_A \leq 2\left(\frac{\sqrt{\kappa(A)}-1}{\sqrt{\kappa(A)}+1}\right)^n \|z_1 - x\|_A$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Nikolausaufgabe
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $b = (0, -1, -1, 0)^T$. Führen Sie, falls möglich, mit $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T$ für jedes System zwei Schritte des CG-Verfahrens durch.

Aufgabe 4: (Programmieraufgabe, Abgabe: 13.12.2010, 12.00 Uhr)
Implementieren Sie das cg-Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben und A positiv definit und symmetrisch. Neben der Näherungslösung sollte auch die Anzahl der durchgeführten Iterationen zurückgegeben werden. Das Verfahren soll abbrechen, falls $\langle r_n, r_n \rangle \leq eps$. Testen Sie Ihr Verfahren mit $m = 601$ an der Matrix $A = (a_{ij})$ mit $i, j = 1, .., m$:

$$a_{ii} = 4, \; a_{ij} = -1, \text{ falls } j \neq i, \; j = i + 1, \; j = i - 1, \; j = m + 1 - i$$

und der rechten Seite

$$b_i = -m - 1 + 3i \text{ für } i \neq \frac{m}{2} \text{ und } i \neq m, b_{\frac{m}{2}} = m + 1, \; b_m = 3m.$$

Die exakte Lösung ist $x_i = i$.