Dr.Frank Wübbeling, Dipl.-Math. Marzena Franek WS 10/11

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Numerische Lineare Algebra

Übungsblatt 8, Abgabe: Montag, 06.12.2010, 12.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Die Matrix A sei konsistent geordnet, und die Eigenwerte des Gesamtschritt-Verfahrens seien reell mit $\rho(M_G) < 1$ für die Iterationsmatrix M_G des Gesamtschritt-Verfahrens. $M_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega R)$ sei die Iterationsmatrix des SOR-Verfahrens und M_E die des Einzelschritt-Verfahrens.

(a) Zeigen Sie, dass der Spektralradius $\rho(M_{SOR})$ minimal wird für $\omega_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(M_G)}}$.

(b) Beweisen Sie die Beziehung $\rho(M_E) = \rho(M_G)^2$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, A = U\Sigma V^*$ sei die Singulärwertzerlegung von A mit geordneten Singulärwerten, $r = rang(A)$. Für μ mit $0 \leq \mu \leq r$ beliebig definieren wir die Approximationsmatrix durch

$$A_\mu := \sum_{j=1}^{\mu} \sigma_j u_j v_j^*, \quad rang(A_\mu) = \mu.$$

Zeigen Sie: $\|A - A_\mu\| = \inf_{B\in\mathbb{R}^{m\times n}, rang(B)\leq\mu} \|A - B\|_2$.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$. Für $j = 1,..,n$ definiere man

$$\mathcal{N}_j := \{N_j \subset \mathbb{K}^n |\ N_j \text{ ist linearer Teilraum der Dimension } n + 1 - j\}.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt:

$$\lambda_j = \min_{N_j\in\mathcal{N}_j} \max_{x\in N_j\setminus\{0\}} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}, \quad j = 1,..,n.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
In einer Messreihe werden Zeitverläufe von Temperaturkurven $T_k(t_l)$ gemessen. In jeder Kurve werden 350 Messwerte gemessen. Die Daten finden Sie auf der Webseite der Vorlesung.

(a) Laden Sie die Kurven mit dem Befehl *importdata* in Matlab ein und schauen Sie sich einige an.

(b) Bestimmen Sie Basiskurven $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ so, dass sich die T_k möglichst gut als Linearkombination dieser Basiskurven approximieren lassen. Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2.

(c) Bestimmen Sie für einige Kurven die Approximation und plotten Sie diese.

Aufgabe 5: (Programmieraufgabe, Abgabe: 06.12.2010, 12.00 Uhr)
Erweitern Sie das Programm von Blatt 7 Aufgabe 4 um die Funktion SOR, welche beim Aufruf das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des SOR-Verfahrens löst. Neben der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ und einem Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ soll zusätzlich noch ein Parameter ω übergeben werden.

(a) Testen Sie ihre Methode an dem Gleichungssystem $Ax = b$ von Blatt 7 Aufgabe 4 für $n = 40$ mit dem Startvektor $x^{(0)} = (0, ..., 0)^T$. Ermitteln Sie experimentell einen Parameter ω, für den das SOR-Verfahren eine möglichst hohe Konvergenzgeschwindigkeit hat. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Anzahl der benötigten Iterationen, die das Gesamtschritt-Verfahren und das Einzelschritt-Verfahren benötigen, um die Genauigkeit $\max_i |u_i - u(x_i)| \leq 10^{-3}$ zu erhalten.

(b) Berechnen Sie den optimalen Relaxationsparameter ω_0 (s. Aufgabe 2a) für die Matrix A von Blatt 7 Aufgabe 4, und führen Sie SOR.m mit diesem Parameter aus.